



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO  
AMAZONAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE FÍSICA  
MESTRADO NACIONAL PROFISSIONAL EM ENSINO DE FÍSICA - MNPEF**

**EDMILSON SOUSA FILHO**

**MATERIAL INSTRUCIONAL PARA O PROFESSOR**

**O ENSINO E APRENDIZAGEM DE OSCILAÇÕES POR MEIO DO SOFTWARE  
MODELLUS**

Manaus - AM  
2019

**EDMILSON SOUSA FILHO**

**MATERIAL INSTRUCIONAL PARA O PROFESSOR**

**O ENSINO E APRENDIZAGEM DE OSCILAÇÕES POR MEIO DO SOFTWARE  
MODELLUS.**

**Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação polo 4  
IFAM/UFAM no Curso de Mestrado Profissional  
de Ensino de Física (MNPEF), como parte dos  
requisitos necessários à obtenção do título de  
Mestre em Ensino de Física.**

**Orientador  
MÁRCIO GOMES DA SILVA**

**Manaus – AM  
2019**

# 1 Introdução

Um intuito do nosso trabalho é possibilitar um estudo continuado individual e profissional, para os docentes e discentes, principalmente na área do ensino computacional. Elaboramos este manual falando das principais funções do software educacional que nos ajudaram a elaborar e por em prática o ensino de oscilações que desejamos no início. Sabemos que o presente produto educacional não é completo, contudo, incentivamos que é um excelente pontapé inicial para a utilização em sala de aula

O *Modellus* é um programa de modelagem matemática, desenvolvido especialmente para ser um agente facilitador do ensino-aprendizagem. Com ele, alunos e professores podem criar e explorar modelos matemáticos aplicáveis a muitos fenômenos naturais. Os modelos podem ser formulados de muitas maneiras – relações funcionais, equações diferenciais, equações iterativas – e são introduzidos no programa utilizando-se a mesma linguagem empregada nos livros e salas de aula. Para usar o *Modellus*, os estudantes não precisam aprender uma linguagem de programação nem familiarizar-se com metáforas computacionais pouco comuns.

Uma das principais características do *Modellus* é que ele permite explorar múltiplas representações do objeto que está sendo estudado. Num único ambiente, pode-se apresentar o mesmo objeto sob diferentes perspectivas. Fórmulas, gráficos, tabelas, vetores e animações são algumas das possibilidades. A capacidade de apresentar e manipular visões diferentes e complementares de uma mesma ideia dá ao usuário do *Modellus* a oportunidade de desenvolver uma intuição sobre o que está sendo estudado, facilitando a criação e fixação de modelos mentais apropriados.

Existem duas maneiras de se usar o *Modellus* em atividades de ensino-aprendizagem: a exploratória e a expressiva. Na primeira, os estudantes utilizam modelos e representações desenvolvidos por outras pessoas (seus professores, por exemplo) para estudar o assunto de interesse, tipo uma "receita de bolo", o problema, as hipóteses, o plano de trabalho e as próprias conclusões sobre os dados a serem obtidos já estão propostos, neste tipo de atividade, o *Modellus* é usado basicamente como um programa de simulação, com o qual os alunos interagem apenas por meio da escolha de dados de entrada, que muitas vezes também são sugeridas pelo próprio professor, cabendo ao aluno muitas vezes apenas mudar a forma como quer ver o fenômeno, por meio do gráfico, tabelas ou animações.

No modo expressivo, os estudantes constroem seus próprios modelos e determinam a maneira de representar seus resultados. Aqui, o *Modellus* assume o papel de ferramenta de modelagem, que dá ao estudante amplo espaço de exploração e intervenção. Também é possível adotar uma combinação dos dois métodos, por exemplo, propondo que os alunos modifiquem modelos criados pelos professores, adaptando-os a novas situações.

## 2 As Janelas do Modellus

O layout do Modellus, ao ser iniciado, está mostrado na Figura . Uma janela é aberta, intitulada Modellus – Modelo Sem Nome. A janela principal contém outras janelas:

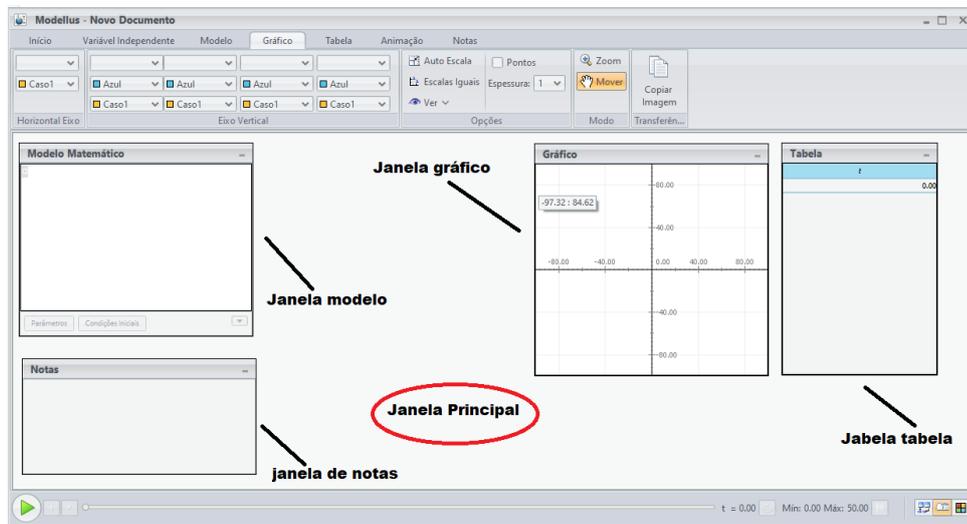


Figura 1: Janela Principal do *Modellus*

- Modelo Matemático, onde você escreve as funções ou equações que deseja estudar.
- Play, usada para executar a simulação baseada em seu modelo. Só apertamos o Play, quando o modelo matemático está completo.
- Gráfico, para fazer gráficos das quantidades definidas no modelo.
- Animação, onde são criadas as animações associadas ao modelo estudado. Também permite a inserção de figuras, fotos e vídeos.
- Tabelas, onde são descritas em formas numéricas detalhadas as grandezas estudadas dos fenômenos, os dados da tabela também podem ser extraídos para um uso eventual que o autor achar útil.
- Notas, para escrever comentários sobre o modelo e a simulação, muito útil quando abirmos uma animação pronta Figura e querermos entender do que se trata.
- Condições Iniciais, onde os parâmetros e condições iniciais são inseridas. Um detalhe importante é que ela só é aberta quando não definidos os parâmetros, as figura 2 e 3 mostram está diferença.

É possível ser exibido pelo Gráfico simultaneamente até 4 casos diferente incluindo as variáveis, mostraremos como fazer isto mais adiante. O mesmo pode ser feito com as janelas do tipo Animação e Tabela.

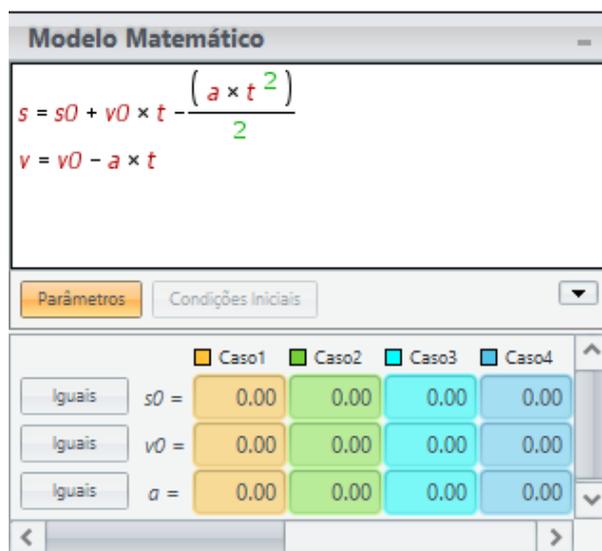


Figura 2: Na primeira Janela do Modelo Matemático, as funções horarias de um Movimento Uniformemente Variado (M.U.V) são inseridas, e seus parâmetros são requisitados, como espaço inicial  $s_0$ , velocidade inicial  $v_0$  e aceleração  $a$ .

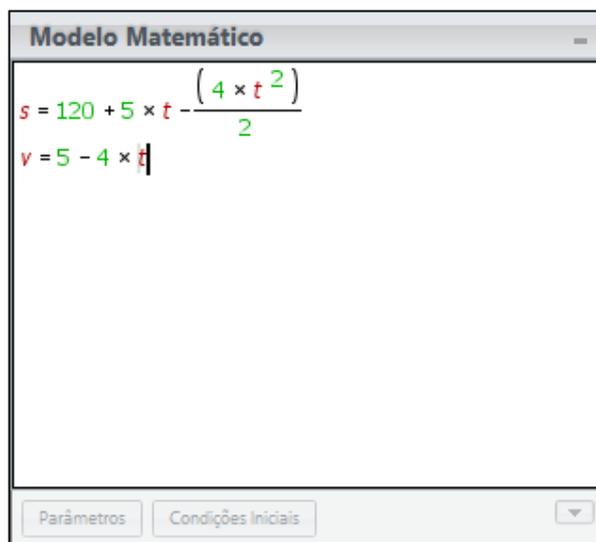


Figura 3: Na segunda janela, os dados já estão inseridos e assim as condições iniciais ou parâmetros não são exigidos.

### 3 Funções e Gráficos

Gráficos de funções matemáticas são um bom começo para a aprendizagem do Modellus. Considere, por exemplo, uma partícula movendo-se com velocidade constante de  $7m/s$ . Seu deslocamento  $x$  após um tempo  $t$  é dado pela função  $s = 7t$ . Para representar este movimento em um gráfico, abra o Modellus e escreva a relação entre  $x$  e  $t$  na janela Modelo, como mostrado na Figura 3.1.

O sinal de multiplicação  $X$  que aparece na expressão matemática da Figura 3.1 pode ser inserido de duas maneiras: usando a tecla de espaço em branco ou o asterisco  $*$ .

Após isso o Modellus vai "compreender" nossa função. Isto é feito clicando o botão Interpretar, que está no alto da janela Modelo. Se tudo estiver correto, ou seja, se o Modellus tiver entendido o que foi escrito, a mensagem "modelo interpretado" ou "Modelo Ok" aparecerá na parte inferior da janela.

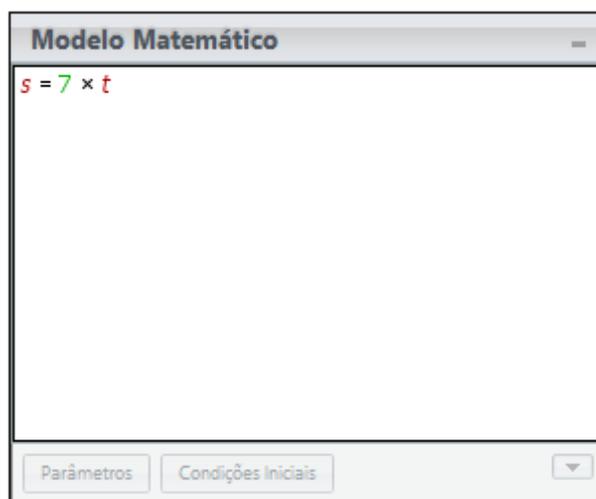


Figura 4: Função horário do espaço  $s = 7t$ .

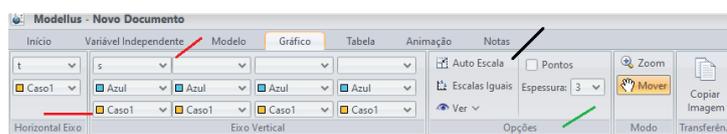


Figura 5: Configurações do janela gráfico, a linha preta indica o botão de *auto escala*, a linha verde a espessura da linha e a linha vermelha indica onde podemos mudar os casos e as variáveis estudadas,

Ao lado da janela Modelo, deve estar outra janela, com o nome Gráfico. É nela que será traçado o gráfico de  $x(t)$ . Seu tamanho e posição podem ser definidos e ajustados para uma visualização melhor clicando no botão *autoescala*, depois clique o botão de início (está com a seta verde). Com isso,  $t$  começa a variar, indo gradativamente de 0 até 50. Esses limites são predeterminados, podendo ser diminuídos ou aumentados. O resultado final está mostrado na Figura.

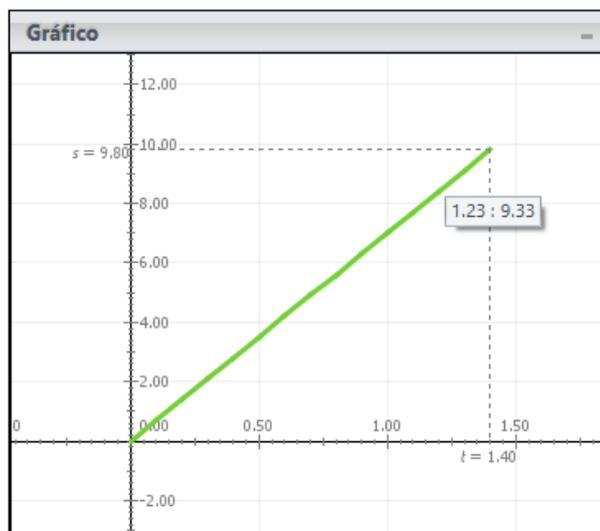


Figura 6: Gráfico da função  $s = 7t$ .

## 4 Parâmetros

Podemos escrever a equação de movimento da nossa partícula de uma forma geral, como  $s = s_0 + vt$ , onde  $s_0$  é a posição em  $t = 0$  e  $v$  é a velocidade. Escrevendo esta relação na janela Modelo, no lugar da fórmula anterior  $s = 7t$ . O resultado deve ser algo como o que está na Figura 7.

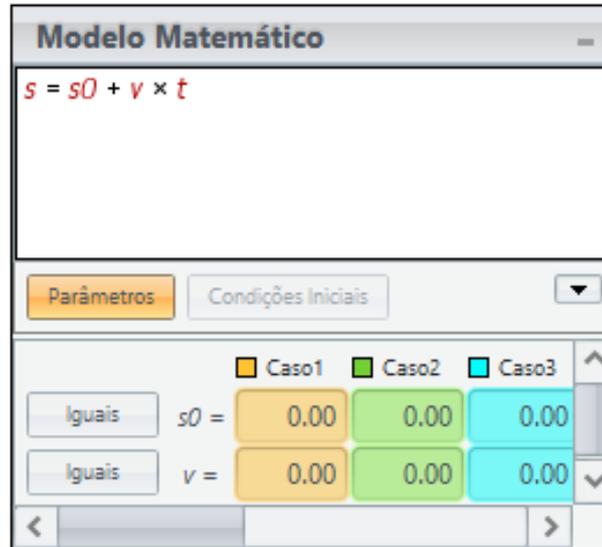


Figura 7: Função horária do espaço do M.U exigindo os parâmetros para prosseguir a animação

Após clicar no botão Interpretar. Observamos que uma nova janela, chamada *parâmetros*, é criada pelo Modellus. O aspecto dessa janela está mostrado na Figura. Nela, podemos especificar os parâmetros  $x_0$  e  $v$  (note que, no início, todos os valores são 0). Coloque, por exemplo,  $x_0 = 10$  e  $v = -1$  nas caixas correspondentes e trace o gráfico. O resultado está mostrado na Figura

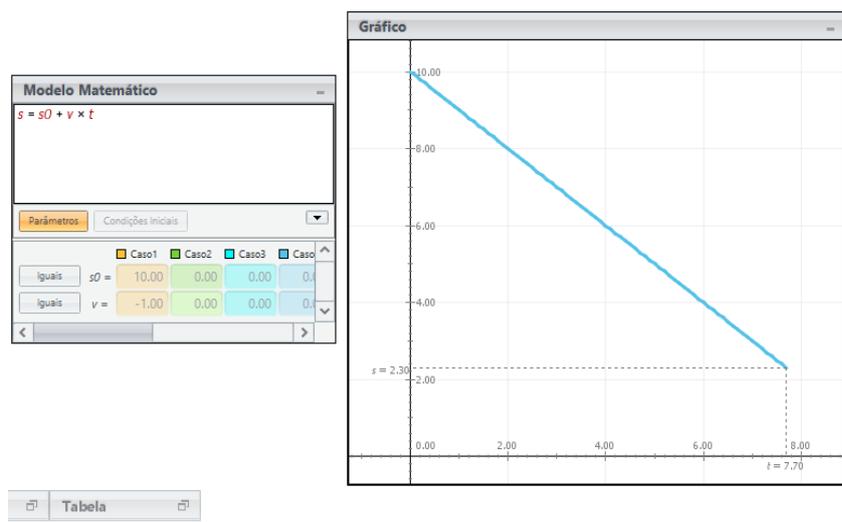


Figura 8: Gráfico da função acima.

## 4.1 Condições Iniciais e Parâmetros

Um dos benefícios de se usar a janela Condições Iniciais é que não precisamos reinterpretar o modelo a cada mudança em um parâmetro, assim como que podemos criar várias instâncias do modelo, com valores diferentes dos parâmetros ou necessariamente escrever cada função para cada partícula. Essas instâncias são chamadas Casos pelo Modellus. Observe que os valores que já escolhemos,  $x_0 = 10$  e  $v = -1$ , estão identificados como caso 1 na janela Condições Iniciais. Para criar um novo caso, vá para a barra de menu e clique Caso/Adicionar. Uma nova coluna, marcada como caso 2, aparece na janela Condições Iniciais. Inicialmente, os parâmetros do caso 1 são colocados automaticamente no caso 2. Mude os valores do novo caso para, por exemplo,  $x_0 = 5$  e  $v = 1$ . Note também que a janela Gráfico 1 foi modificada: no alto, à esquerda, onde está escrito “Casos”, existem agora duas caixinhas (antes, só havia uma). Se a primeira está marcada, o gráfico do caso 1 é feito. Escolhendo a segunda, o caso 2 é desenhado. Marque as duas caixas, de modo que os dois casos apareçam simultaneamente no gráfico, e inicie o desenho. O resultado deve ser parecido com a Figura.

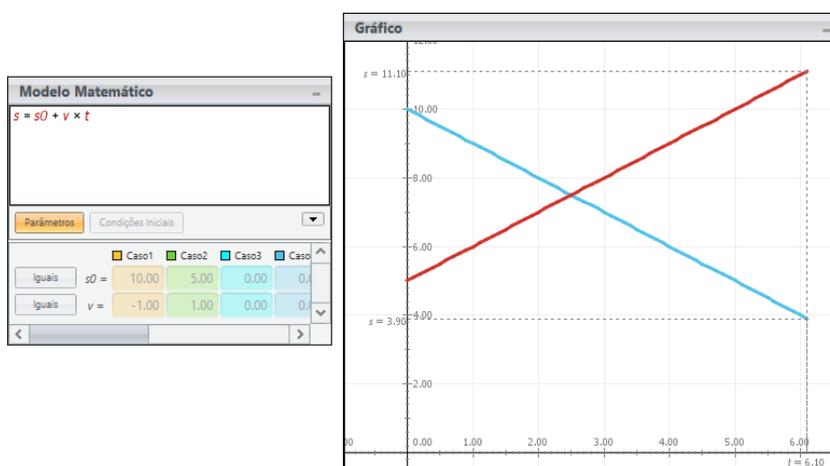
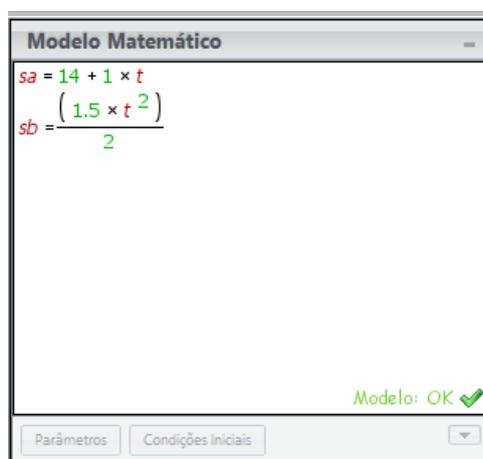


Figura 9: Usando as condições iniciais, podemos representa mais de um caso.

## 5 Animando o Movimento

A não visualização do fenômeno estudado é uma das principais queixas do aluno, alguns dizem ser muito "abstrato" ou ter que "imaginar demais", a possibilidade de ver o modelo por gráfico ou tabela ajuda, contudo, a fraqueza de uma leitura e interpretação de dados numéricos por meio do gráfico ou tabela é evidente para maioria dos alunos, levando o docente a ter que "mostrar" realmente o que está acontecendo.

Um dos exemplos que iremos utilizar é uma simulação ainda da cinemática, que envolve ultrapassagem de veículos. Consideramos um carro A com velocidade constante a um determinado espaço inicial e outro carro B com aceleração constante sendo seu espaço inicial igual a zero e sua velocidade também igual a zero. A pergunta que pode ser feita logo em seguida é, em quanto tempo o carro B alcança o carro A ?. Inserimos as funções horárias que regem os dois carros no modelo matemático que pode ser visto na Figura.



The image shows a software window titled "Modelo Matemático". Inside the window, two equations are displayed:  $s_a = 14 + 1 \times t$  and  $s_b = \frac{1.5 \times t^2}{2}$ . The equations are written in a red font. At the bottom right of the window, there is a green status bar that says "Modelo: OK" with a green checkmark. At the bottom left, there are two buttons: "Parâmetros" and "Condições Iniciais".

Figura 10: Função horária.

Logo em seguida vamos na janela *animação*, clicando em partícula e depois na parte em branco da janela que surgira uma série de objetos figura 8 que podem ser usados, por ser um assunto da cinemática escolheremos dois carros distintos para representar o carro A e o carro B, um detalhe importante, ao querer escolher mais um carro, teremos que seguir de volta todo processo novamente, janela *animação*, depois em partícula e assim sucessivamente. Feito isto duas vezes, ao clicar no objeto da *animação* que é o carro, podemos definir as variáveis ou variável que ele estará sujeito em cada eixo do movimento figura 9.



Figura 11: Objetos que podem ser usados para as simulações

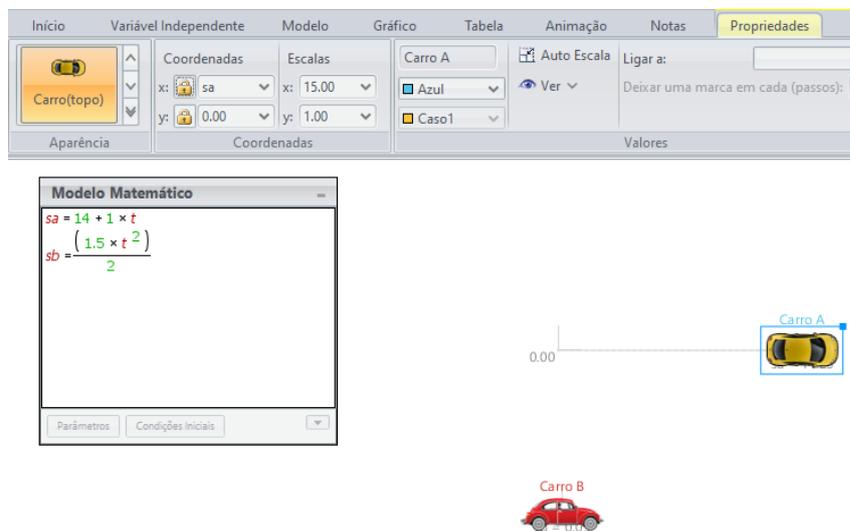


Figura 12: Pode se notar que o carro A está um pouco distante do carro B, isto acontece, devido o carro A ter uma posição inicial  $14m$  a frente do carro B

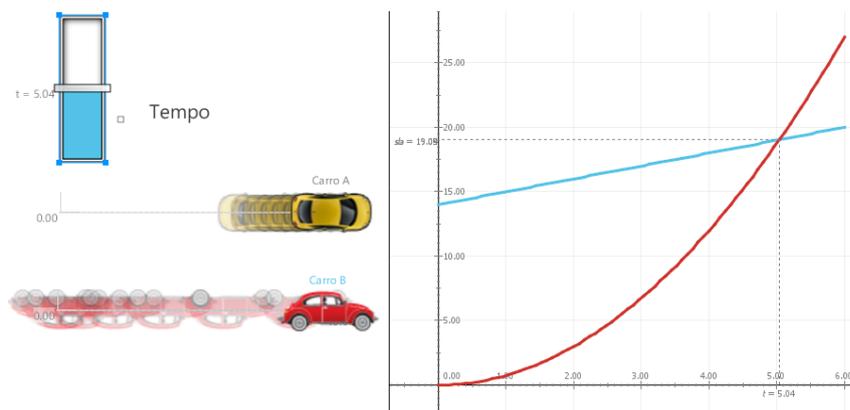


Figura 13: Momento exato que o carro B alcança o carro A, o momento da ultrapassagem está sendo exposto por meio do gráfico e animação.

## 6 Oscilador Harmônico

### Dinâmica Newtoniana no Modellus

Na mecânica Clássica, a dinâmica de uma partícula é regida pelo segunda lei de newton:

$$F = ma$$

onde  $F$  é a força que atua sobre a partícula, e  $m$  e  $a$  são respectivamente a sua massa e aceleração. A força  $F$  pode depender da posição  $x$  da partícula, da velocidade  $v = dx/dt$  e do tempo  $t$ ; em linguagem matemática,  $F = F(x, v, t)$ . Por simplificação, estamos supondo que o movimento se dá em uma dimensão de coordenada  $x$ . Como a aceleração é  $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ , a lei de Newton é uma equação diferencial de segunda ordem.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \left( x, \frac{dx}{dt}, t \right)$$

A solução dessa equação é  $x(t)$ , a função que dá a posição da partícula como função do tempo. No entanto o Modellus não opera diretamente com equações diferenciais de segunda ordem, de modo que não podemos usá-lo para resolver a equação de movimento – pelo menos não na forma como ela está escrita. Entretanto, reescrevendo a segunda lei de Newton como um par de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(x, v, t)$$

Essa forma é equivalente à anterior e usa apenas derivadas simples – portanto, ela pode ser programada e resolvida no Modellus. No nosso trabalho, focamos nosso uso no oscilador harmônico nos mais variados casos e aplicações.

Um questionamento que o docente pode fazer, é sobre o uso de equações diferenciais em vez do uso da utilização das funções horárias do que regem um M.H.S, uma das respostas é que no futuro quando envolvermos o uso do atrito não precisaremos mudar radicalmente a equação original que estávamos usando no M.H.S sem atrito, e além do mais, estamos mais preocupados com a compreensão do aluno do fenômeno do que focar exclusivamente no aprendizado e memorização de uma equação a mais.

## O oscilador harmônico simples

Osciladores harmônicos são bastante comuns, e geralmente o estudo de oscilações tem início por idealizar um sistema que está vibrando com pequena amplitude em torno de um ponto de equilíbrio, executando um movimento harmônico. O protótipo de oscilador harmônico é o sistema massa-mola, em que uma partícula de massa  $m$  está presa a uma mola ideal, perfeitamente elástica e sem resistência de qualquer força dissipativa. A força que a mola faz sobre a partícula é dada pela lei de Hooke

$$F = -kx$$

em que  $x$  é o deslocamento da partícula (relativo ao ponto de equilíbrio, onde  $F = 0$ ) e  $k$  é a “constante elástica” da mola. Para estudar o oscilador harmônico com o Modellus, vamos primeiro escrever as equações de movimento na janela Modelo, na maneira mostrada na Figura.

Interprete o modelo e, na janela de Condições Iniciais, defina  $m = 2$ ,  $k = 2$ , enquanto na janela de Parâmetros fixe  $x(0) = 0$  e  $v(0) = 2$ . Execute a simulação e observe o gráfico de  $x(t)$ , que deve ser semelhante ao que está na Figura

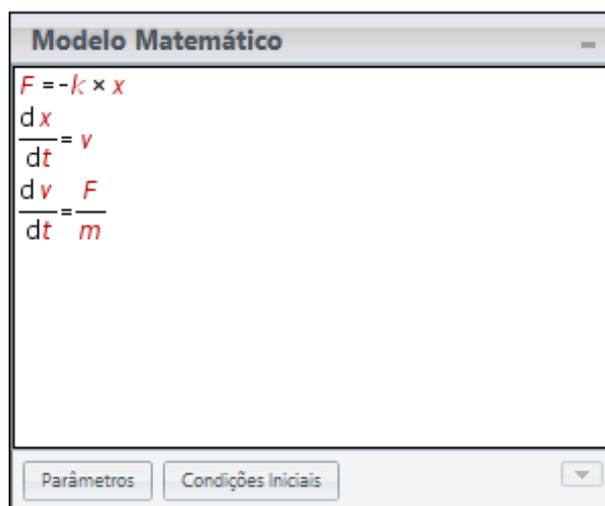


Figura 14: Par de Equações Diferenciais que regem o M.H.S sem atrito

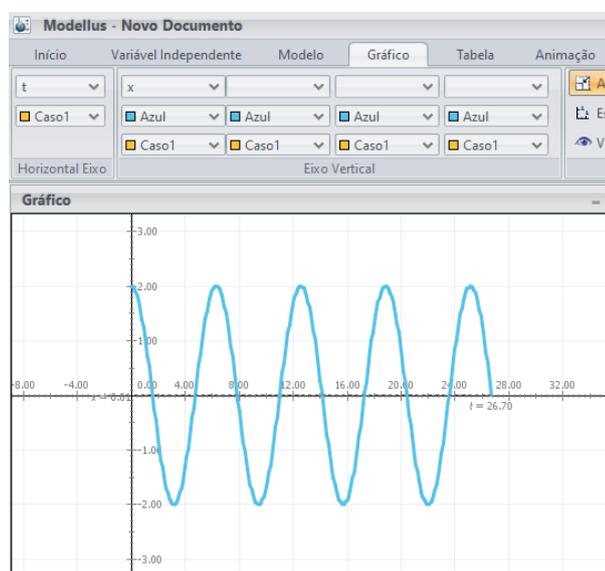


Figura 15: Gráfico da função  $x(t)$

Podemos observar como o sistema oscila com período e amplitude bem definidos. Uma pergunta importante e investigativa que pode ser feita durante a aula de laboratório ou mesmo ser uma tarefa é : O período das oscilações depende da amplitude? Para investigar essa questão, o aluno poderá criar novos casos com os mesmos  $k$  e  $m$  (ou seja, é o mesmo oscilador) e condições iniciais que gerem amplitudes diferentes. Um exemplo está na Figura 7.3, na qual definimos dois novos casos mudando a velocidade inicial. A Figura 7.4 mostra o movimento da partícula nos três casos. Observe que, embora a amplitude de oscilação mude bastante de um caso para outro, o período permanece igual.

Os resultados da Figura 7.4 se mostram interessante, podendo ser abordado em sala de aula, sobre o oscilador harmônico: o período não depende da sua velocidade inicial e da amplitude do movimento. É claro que a observação de três exemplos não constitui uma demonstração formal, mas a conclusão de que o período independe da amplitude ou da velocidade é bem razoável. Se o oscilador harmônico tem um período característico, a próxima pergunta relevante é: Quanto vale esse período? A resposta está na Figura 7.5, em que fizemos um zoom sobre o final do primeiro ciclo mostrado na Figura 7.4. Vemos que as três curvas saem de  $x = 0$  e, após uma oscilação completa, passam novamente por



Figura 16: Dados da constante elástica da mola  $k$  e da massa sendo iguais para ambas as funções.



Figura 17: A posição inicial  $x$  é igual para ambos, contudo as velocidades para cada função são diferentes.

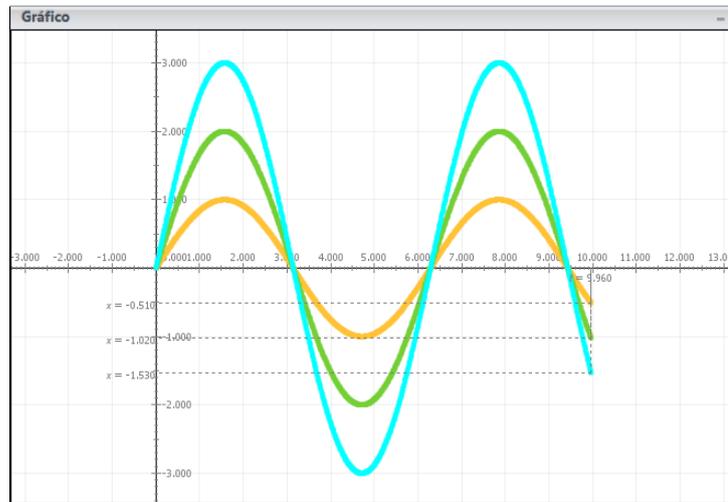


Figura 18:

esse ponto exatamente no mesmo instante. Esse é o período da oscilação, e a Figura 7.5 mostra que ele vale  $T \approx 6.28$ . Esta conclusão pode servir futuramente para o ensino em sala de aula, a equação do período de um M.H.S é definido como

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Observando a equação acima, não se encontra as variáveis amplitude e velocidade como dependente do período de um sistema M.H.S, porém, os alunos conseguiram observar isto ?

## A energia no Movimento Harmônico Simples

A energia do oscilador harmônico simples é soma das energias cinética  $E_c = mv^2/2$  e potencial elástica  $E_p = kx^2/2$ . Inserindo o cálculo das duas energias no mesmo modelo

inicial que projetamos, ou seja, não mudamos o par de equações diferenciais do início, podemos observar o seu comportamento.

Modelo Matemático

$$F = -k \times x$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$$Ec = \frac{(m \times v^2)}{2}$$

$$Ep = \frac{(k \times x^2)}{2}$$

$$Etotal = Ec + Ep$$

Figura 19: Par de Equações Diferenciais envolvendo a energia do movimento.

Com essa mudança, podemos fazer os gráficos das energias cinética e potencial em função do tempo. Os resultados (com  $k = 1$  e  $m = 4$ ) estão na Figura 7.10. A Figura 41-1 mostra os gráficos da energia cinética, potencial e da energia total em função do tempo. Nela, vemos que a energia potencial está defasada em relação à cinética (e vice-versa). A energia total é constante e igual aos valores máximos da potencial e da cinética. Outro exemplo que podemos usar para consolidar a ideia de que a energia mecânica é conservada quando o atrito é desprezível é no modelo do lançamento oblíquo de uma partícula no vácuo.

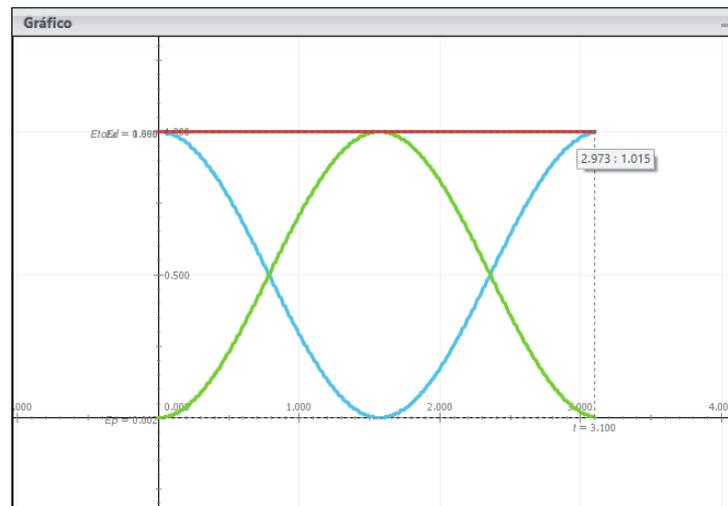


Figura 20: A linha verde representa a energia potencial elástica, enquanto a azul representa a energia cinética, e assim, a linha vermelha representa a energia mecânica total que é a soma das duas energias, mostrando assim sua conservação durante o movimento sem atrito.

## 6.1 Animação no M.H.S

Uma maneira de apresentar o M.H.S sem ser pelos gráficos e criando uma animação onde se ilustrar a conservação de energia do m.h.s, assim como acrescentando vetores que mostram as grandezas vetoriais como força elástica, velocidade e aceleração. Vamos na Janela *Animação*, apertando o botão *indicador de nível* e clicando em seguida em um ponto interior da janela. Um objeto em formato de barra será criado, automaticamente acima,

surgira um janela com as configurações desse objeto. Para a definição das propriedades sugerimos que siga o modelo da Figura, o nível da barra é dado pela energia cinética  $E_c$ , os níveis mínimo e máximo são 0 e 10 (no gráfico da Figura 7.10, a energia cinética varia de 0 a 2) etc. Repetindo o procedimento anterior, crie mais duas barras: uma representando a energia potencial  $E_p$  e a outra, a energia total  $E_{total}$ , apenas modificando a cor que vai representar cada energia. O resultado deve ficar parecido com o que está na Figura 7.13. Ao executar a simulação, os “níveis” de energia cinética e potencial sobem e descem, enquanto a energia total permanece estável.

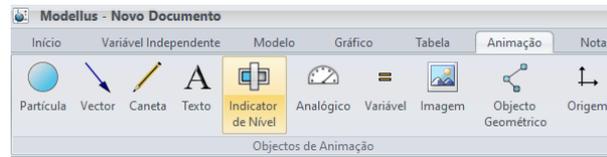


Figura 21: Selecionando o indicador de nível.

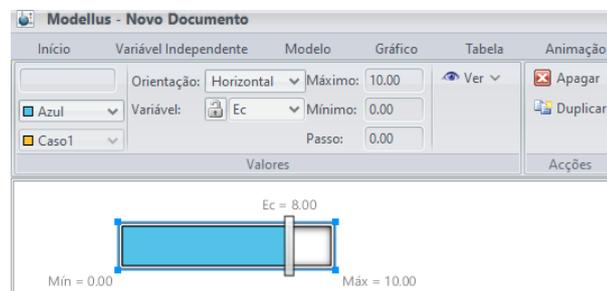


Figura 22: Configuração do indicador de nível

Mesmo com a utilização de gráficos e das barras, o aluno ainda precisa associar por completo essas variações de energia seja no gráfico ou no indicador de nível a uma *imagem* do movimento que torna o comportamento mais real de um M.H.S, para isso temos que aprender a manipular e importar imagens no *modellus*.

Encontrar a figura adequada é um grande desafio, deixamos uma na pasta de imagens do projeto, mas caso, queira a imagem pela internet, este é o endereço dela. O software consegue importa imagens png,bmp ou gif.

<https://www.bing.com/images/blob?bcid=TjWcptoMYr0ALA>

Após o dowload ou a extração da pasta com imagens do projeto, sugerimos que sua localização seja fácil de se encontrar.

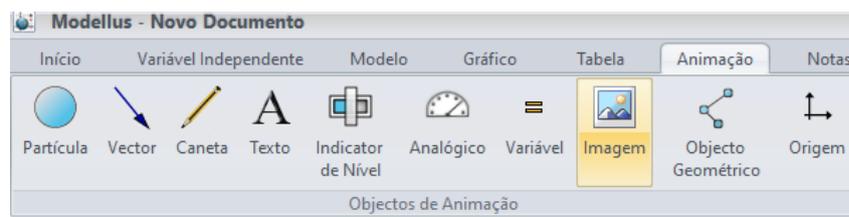


Figura 23: Selecionado o botão para inserir a imagem.

O desenho que acabamos de adicionar se encontra sem movimento, seu tamanho e posição não mudam com o tempo, a simples inserção na janela do modellus, não altera nenhuma propriedade dele e nem o andamento da simulação em si. Desejamos que a mola

represente o oscilador, temos de fazer com que o comprimento da imagem acompanhe o movimento do sistema, aumentando e diminuindo à medida que o tempo passa. Para isso, vamos na janela modelo matemático e inserimos um expressão algébrica para a variação do comprimento da mola figura, que será escrita assim  $L = x + 20$ , figura este  $c$  representa o comprimento da mola que está dependente da da posição variável  $x$  mais um número fixo. A outra figura mostra também outras configurações que a imagem precisa ter antes de iniciar a simulação.

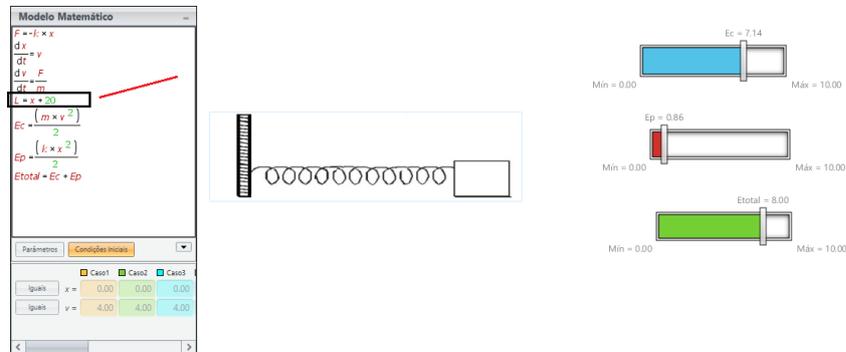


Figura 24: Simulação do M.H.S, frisamos o detalhe da expressão algébrica na janela matemática que possibilita o comprimento do oscilador acompanhar o movimento.

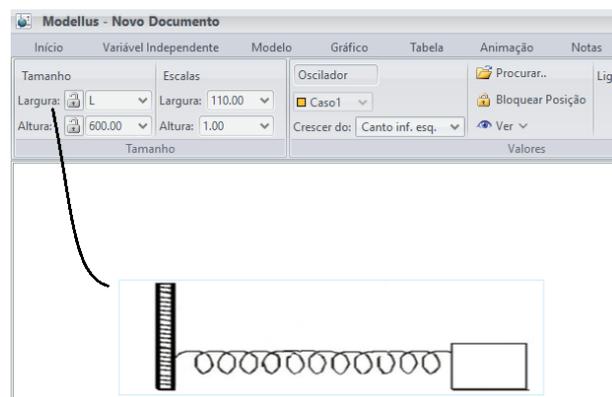


Figura 25: A largura da imagem do oscilador é em função do  $L$

Podem parecer de início trabalhoso o processo anterior (com o crescente uso, isto é diminuído) entretanto ilustra bem os recursos do que o Modellus possui para a construção de várias representações do mesmo objeto (neste caso o M.H.S). Descrevemos os gráficos da posição  $x(t)$ , da velocidade  $v(t)$ , e das energias, que também podiam ser obtidas pelo uso da tabela. Todas essas representações são, em certo sentido, semelhantes, contudo cada uma revela um aspecto distinto e importante do objeto estudado (o oscilador harmônico). Não é simples encontrar ferramentas didáticas que permitam aglomerar, em um mesmo espaço, tantas visões diferentes e complementares sobre um mesmo assunto.

Essas variedades de ferramentas engloba um número muito diversificado de profissionais da educação, alguns só utilizam o modellus pelo gráfico, outras pela tabela, ou pela possibilidade de criar uma animação.

## 6.2 Oscilador Harmônico Amortecido

Osciladores Harmônicos reais não oscilam infinitamente, devido a forças resistivas como resistência do ar, forças de atrito e etc, que estão constantemente "enfraquecendo" o mo-

vimento até sua finalização. Vamos considerar uma força dissipativa proporcional à velocidade, a resultante desta força sobre o oscilador harmônico é

$$F = -kv - bv$$

Para inserir a força dissipativa no modelo das equações diferenciais, basta acrescentar o termo  $-bv$  à força da Lei de Hooke. Após a interpretação e usando o  $b = 0.070$  para o coeficiente de atrito, obtemos o movimento mostrado na figura 15 (neste modelo definimos  $m = 1$  e  $k = 2$ ). Assistimos um amortecimento do movimento devido a força de atrito que diminui progressivamente até o retorno do ponto de equilíbrio.

Podemos inserir os termos da energia cinética e potencial elástica neste modelo, analisando as diferenças agora dos gráficos destes dois modelos figura 16.

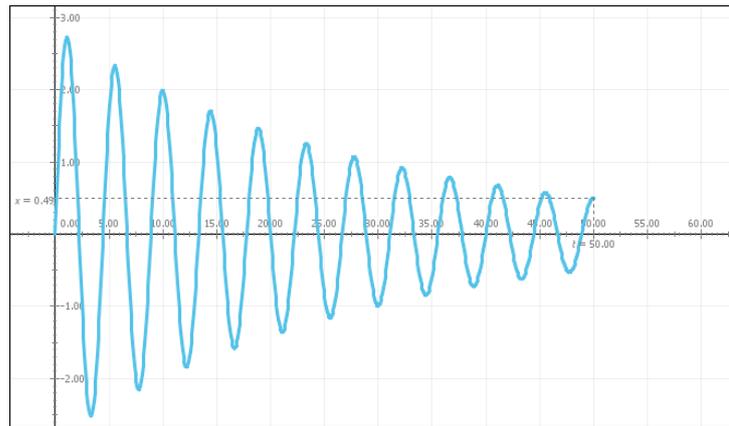


Figura 26: Movimento Harmônico Amortecido

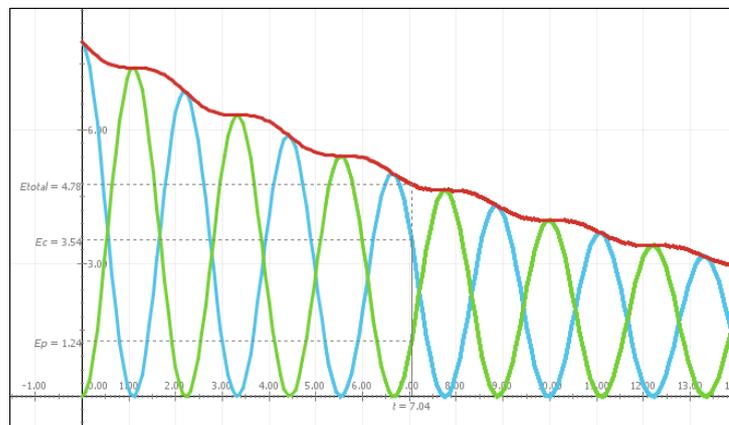


Figura 27: Energia Total de um Movimento Harmônico Amortecido não sendo conservada. A energia cinética é representada pela linha azul, potencial elástica pela linha verde e a energia total pela linha vermelha

Um detalhe importante que relatamos anteriormente é sobre a facilitação do uso do par de equações diferenciais. Se fossemos escrever a função horária de um movimento harmônico amortecido, teríamos que abrir um nova janela modellus e escrever ela

$$x(t) = x_m e^{\frac{-bt}{2m}} \cos(\omega t + \delta)$$

Enquanto que usando equações diferenciais apenas inserirmos o termo  $-bv$  no modelo já existente.

Se o amortecimento for muito forte, o movimento do sistema massa-mola deixa de ser oscilatório. E o que acontece com o sistema que já estudamos ( $k = 2$  e  $m = 1$ ) para  $b = 4$  e  $b = 8$ . Os resultados estão na Figura 17. Notamos como a massa volta à posição de equilíbrio sem oscilar. O caso com  $b = 8$  é um exemplo de movimento superamortecido, que ocorre quando  $b^2 > 4mk$ . Com  $b = 4$ , o sistema tem amortecimento crítico, que ocorre quando  $b^2 = 4mk$ . Sistemas com  $b^2 < 4mk$  são chamados subamortecidos e apresentam os movimentos oscilatórios que já estudamos.

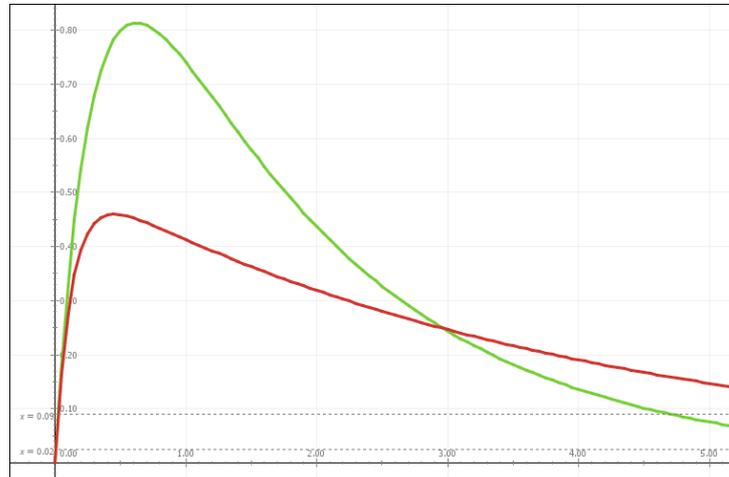


Figura 28: Movimento com amortecimento crítico ( $b = 4$ , curva ) e superamortecimento ( $b = 8$ ).Nos dois casos,  $k = 1$  e  $m = 4$ .

Em sala de aula, usamos a aplicação deste modelo no cotidiano do aluno, uma delas e na construção de mecanismos de molas que fazem portas se fecharem automaticamente. Quando a porta é solta, ela tem que fechar de modo tal que, ao chegar ao batente, ela também esteja em repouso, para que não colida com o batente, podemos falar também sobre o amortecimento dos carros, caminhões, motocicletas, bicicletas etc. Se tivéssemos em uma sala do terceiro ano do ensino médio, poderíamos comentar também sobre o princípio da construção de ponteiros de instrumentos analógicos como amperímetro, voltímetros etc., onde é necessário que o ponteiro volte à posição de origem da escala no menor tempo possível.

Mostraremos a seguir alguns exemplos de simulações envolvendo o amortecimento superamortecido. Nele ilustramos a aplicação de um amortecedor de um carro, na esquerda da imagem mostra o gráfico da posição  $x(t)$ , no centro a imagem que ilustra o movimento e na parte direita os dados numéricos da velocidade inicial na forma de tabela em função do tempo.

A simulação em si é rápida, o que o aluno precisa entender e a razão de ser rápida, porque se não fosse essa força que possui um coeficiente de amortecimento tão forte, o carro, o caminhão ou moto iria ficar continuar oscilando, podendo ocorrer acidentes, vale lembrar também que mesmo se o coeficiente de amortecimento existir, se ele for baixo, o risco de acidente ainda existiria. O aluno poderá se questionar que tipos de acidentes aconteceria ?

- *Aumento da distância de frenagem* - Pouco relacionada aos amortecedores. Porém, a verdade é que um dos riscos do amortecedor danificado é ele não fornecer a aderência necessária no momento da frenagem, aumentando a distância até uma parada total. Isso acontece porque o amortecedor já não consegue “resistir” ao movimento natural da carroceria durante a frenagem, que aumentaria o peso e a força do contato entre

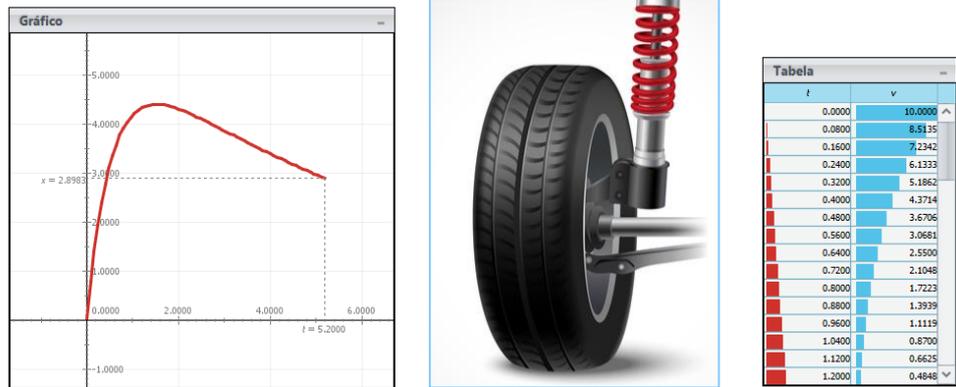


Figura 29: Simulação de Movimento Super-amortecimento de um amortecedor de carro.

pneus e solo. Com menos aderência, freia-se menos e o risco de colisões aumenta — e muito.

- *Rolagem da carroceria* - Uma das tarefas principais dos amortecedores é garantir a estabilidade do veículo em qualquer situação, especialmente nas curvas. Porém, quando um amortecedor não está mais trabalhando adequadamente, o carro pode começar a “rolar” demais em curvas. Além de desestabilizar o veículo, deixando-o difícil de controlar, os riscos do amortecedor danificado nesse caso podem levar até ao capotamento do veículo

Além de fornecer uma situação mais realística do fenômeno físico estudado por meio de simulação, podemos inclusive conscientizar os discentes que poderão se tornar condutores no futuro a ter a devida atenção na manutenção do seu veículo, podendo também ir além, conscientizando seus pais e amigos sobre o que aprenderam em sala de aula.

## Avaliação Teórica

Professor:

### **A Física em nosso Cotidiano – Movimento oscilatório amortecido**

No Estudo de osciladores consideramos apenas as forças restauradoras. No entanto, por causa da existência de forças dissipativas (atrito e resistência do ar), a amplitude de oscilação não fica oscilando eternamente, mas, diminuindo gradativamente até o oscilador atingir o repouso. As oscilações nesse caso, são denominadas **amortecidas**. Quando fornecemos energia ao oscilador de modo a manter constante a amplitude de oscilação, fazendo oscilar com uma frequência diferente de sua frequência própria, as oscilações são denominadas **forçadas**.

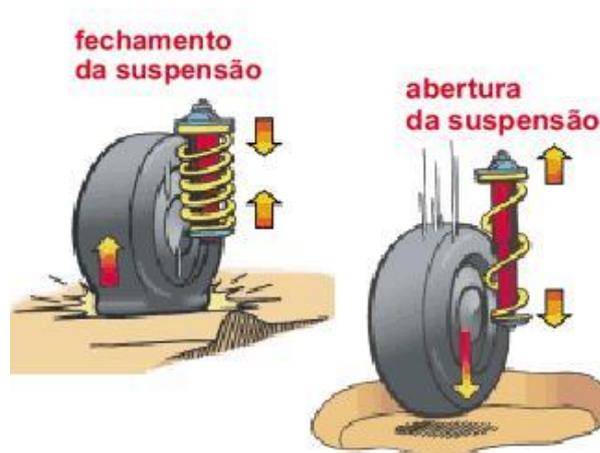


Figura 1: Ilustração do funcionamento da suspensão de um carro.

O sistema de suspensão dos automóveis conta basicamente de molas e amortecedores. As molas oscilam de um modo forçado quando o carro passa por pistas irregulares, isto é, com saliências e buracos. Os amortecedores (absorvedores de vibrações) atenuam os movimentos das molas, produzindo oscilações amortecidas. Sem os amortecedores as molas continuariam a oscilar e o carro vibraria por um tempo muito maior a cada solavanco. Um amortecedor ideal eliminaria completa e rapidamente as oscilações e o carro retornaria diretamente à sua posição de origem.

Outro exemplo de movimento amortecido, é o sistema massa-mola imerso em um líquido e oscilando na direção vertical.

Nessa situação, há **dissipação de energia** por causa da viscosidade do líquido. O corpo oscila, e sua amplitude diminui ao longo do tempo, até que o corpo pare, podemos ver a diferença da amplitude de um movimento com atrito (Figura 2) com um movimento sem atrito (Figura 3).

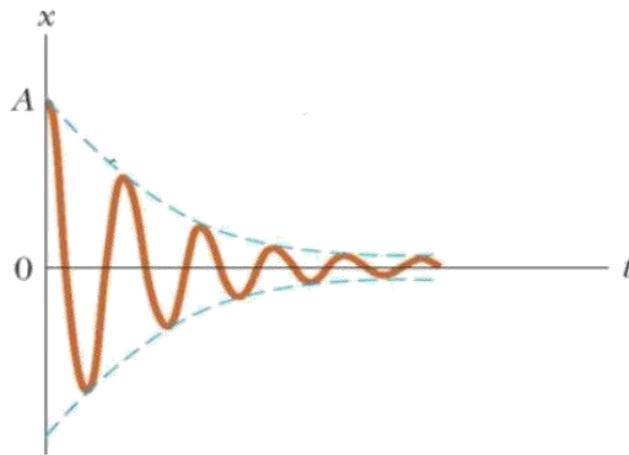


Figura 2: Com o passar do tempo, a amplitude do movimento decai. A energia mecânica do sistema massa mola é reduzida, até que se transforma em outros tipos de energia, situação em que a oscilação para.

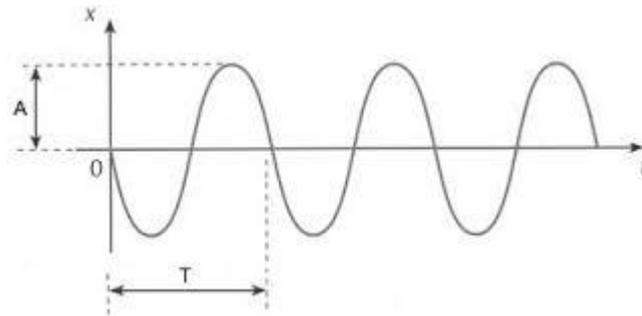


Figura 3: A amplitude de um movimento de um sistema massa sem atrito, se mantendo constante.

Isso acontece porque os fluidos em geral amortecem o movimento. Quanto mais **viscoso** é o fluido, mais rapidamente ocorre a dissipação de energia. Por isso, os amortecedores dos automóveis funcionam geralmente com óleo mineral, que é bem viscoso, e contam ainda com o uso de gás nitrogênio sob pressão, que mantém a temperatura interna do amortecedor em nível adequado a função, uma vez que a temperatura do amortecedor tende a subir por causa da energia dissipada.

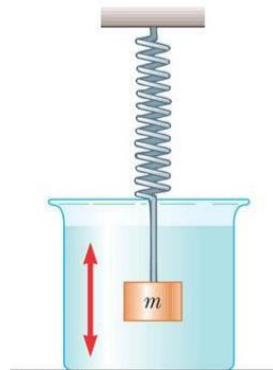


Figura 4: Representação de um amortecimento MHS devido a viscosidade de um líquido.

## **Viscosidade**

A viscosidade de um fluido é basicamente uma medida de quanto ela gruda. A água é um fluido com pequena viscosidade. Coisas como shampoo ou xaropes possuem densidades maiores. A viscosidade também depende da temperatura. O óleo de um motor, por exemplo, é muito menos viscoso a temperaturas mais altas do que quando o motor está frio. Para fluidos que se movem através de tubos (como as dos carros), a viscosidade leva a uma força resistiva

## Links uteis para estudo

- *Introdução ao Movimento Harmônico Simples.*

Vídeo aula simples e curta para revisar o conteúdo. [Canal Responde ai!](#)

<https://www.youtube.com/watch?v=WpZKUoZWkkg&list=PLNG61M7eOuwBuLnJnmzWg3rUV1v-KTO&index=12>

- *Energia do Movimento Harmônico Simples. [Canal Responde ai!](#)*

Vídeo aula simples e curta para revisar o conteúdo.

<https://www.youtube.com/watch?v=ipDPQLyozfI&list=PLNG61M7eOuwBuLnJnmzWg3rUV1v-KTO&index=11>

- *Tema 02 - Oscilações Amortecidas | Experimentos - Amortecimento subcrítico, crítico e supercrítico.*

Neste vídeo é feito uma série de experimentos para ilustrar os mais variados tipos de oscilações, muito útil.

[https://www.youtube.com/watch?v=h\\_JOS7ldl48&list=PL1Dg4Oxxk\\_RI2Ppb541vQyaUbqUuXtiuJ&index=3](https://www.youtube.com/watch?v=h_JOS7ldl48&list=PL1Dg4Oxxk_RI2Ppb541vQyaUbqUuXtiuJ&index=3)

- *Amortecedor Estourado - O carro anda assim*

Neste vídeo é mostrado um exemplo real de um carro na rodovia sem amortecedor traseiro.

[https://www.youtube.com/watch?v=kc\\_YIYFJQR4](https://www.youtube.com/watch?v=kc_YIYFJQR4)

## Questões para Verificação do Aprendizado

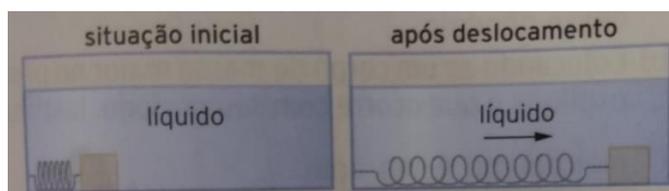
(Unicentro-PR) Amortecedores de carros são itens essenciais para garantir conforto e segurança aos passageiros de veículos de transporte. Eles devem, por um lado, evitar que as oscilações provocadas pelas irregularidades dos terrenos por onde passa o carro tornem a viagem desconfortável sem, por outro lado, comprometer a estabilidade do automóvel, dissipando o mais rapidamente possível a energia. Assinale a alternativa que caracteriza corretamente um amortecedor ideal.

- Absorve rapidamente as vibrações provocadas por acidentes do terreno voltando, sem oscilar, à posição de equilíbrio.
- Não dissipa a energia das vibrações provocadas por acidentes do terreno, evitando assim a fadiga do material e o desconforto dos passageiros.
- Tem frequência de oscilação variável, que depende da amplitude de oscilação, diferenciando assim as grandes e pequenas vibrações provocadas pelos acidentes no terreno.
- Tem alta frequência de oscilação, fazendo com que o carro fique macio e confortável.
- Tem um grande período de oscilação, para que a dissipação das vibrações não seja transmitida ao carro e aos passageiros.

2) Um carro percorre um trecho de estrada cuja superfície é ondulada. Como a vida útil dos amortecedores de seu carro está vencida o motorista realiza um movimento harmônico simples vertical de amplitude 4,0 cm ao atravessar tal trecho. Sendo a aceleração da gravidade  $10 \text{ m/s}^2$  e considerando  $\pi^2 = 10$ , a maior frequência de vibração do carro para que o motorista não perca contato com o assento é?

- a) 5,0 Hz
- b) 4,0 Hz
- c) 2,5 Hz
- d) 2,0 Hz
- e) 1,0 Hz

3) Imerso em um recipiente preenchido por um líquido, um sistema massa-mola realiza um movimento oscilatório horizontal com amplitude inicial de 60 cm. A mola tem constante elástica  $K = 200 \text{ N/m}$ .



- a) Pode-se considerar que o sistema é conservativo? Justifique
- b) O que ocorre com a amplitude do movimento com o passar do tempo? Por quê?
- c) Explique o aumento da temperatura do líquido durante o movimento.

4) A fotografia abaixo mostra a suspensão de uma motocicleta, com destaque para o amortecedor, no qual se nota a presença de uma mola.



- a) Analise se a mola é comprimida ou esticada depois que a motocicleta passa pela posição mais baixa de uma depressão na pista.
- b) Descreva o que aconteceria com o movimento vertical da moto caso não houvesse um amortecedor na suspensão.

Aluno:

Turma

Aluno:

Nome:

Turma:

Nome:

Professor:

## Avaliação Computacional

### **Objeto executando um Movimento Harmônico Simples (MHS)**

Nesta atividade, vamos analisar o caso de um objeto que executa um Movimento Harmônico Simples, oscilando sobre um plano horizontal sem atrito e livre da influência do ar. Para tanto, utilizaremos este guia de atividades, juntamente com simulações no software Modellus.

Questão 1 – Abra a pasta Avaliação Final que está na área de trabalho do seu computador. Nessa pasta, abra o arquivo “**simulação\_inicio**”. Após fazer isso, leia o enunciado abaixo, analise a simulação e responda.

A figura 1 representa um sistema massa-mola, ou seja, um bloco com determinada massa preso a uma mola ideal não deformada (com massa desprezível e coeficiente de elasticidade constante), inicialmente em repouso. A figura 2 mostra um menino que distende a mola, afastando o sistema da sua posição de equilíbrio e soltando depois, deixando assim o movimento acontecer naturalmente. Nas figuras, estão representados os pontos da trajetória do bloco - **a**, **b**, **c** e **d** -, sendo **a** e **d** os pontos extremos do movimento do bloco, e o ponto **o** como o ponto médio. Considere desprezíveis todas as formas de atrito.

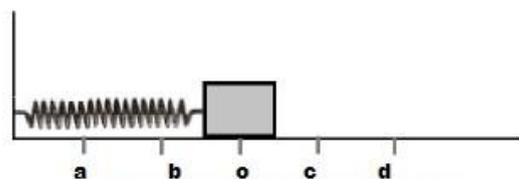


Figura 1 – Sistema massa-mola.

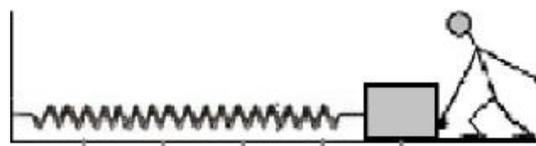


Figura 2 – Sistema massa-mola.

Com base no enunciado e no que você observou na simulação, faça uma análise do movimento do bloco, descrevendo suas características da força elástica, velocidade e aceleração.

---

Questão 2 - Após fazer isso, **Abra a “simulacao\_i”** analise a simulação e responda

- Em qual (is) ponto (s) (**a**, **b**, **c** ou **d**) a energia potencial elástica é máxima? Em qual (is) ponto (s) a energia potencial elástica é nula?

- b) Em qual (is) ponto (s) (**a**, **b**, **c**, ou **d**) a velocidade é máxima em módulo? Em qual (is) ponto (s) a velocidade é nula??

Questão 3 Abra a “simulacao\_ii”

- a) Altere o valor da massa para um valor quatro vezes maior. O que acontece com o período de oscilação do sistema?
- b) Altere o valor da massa para um valor quatro vezes menor. O que acontece com o período de oscilação do sistema?
- c) Qual a relação entre a massa do sistema e o período de oscilação?
- d) Altere o valor da constante elástica da mola para um valor quatro vezes maior. O que acontece com o período de oscilação do sistema?
- e) Qual a relação entre a constante elástica da mola e o período de oscilação? Existe alguma relação com o valor da aceleração máxima do sistema?

Questão 4- Abra a “simulacao\_iii”

Um sistema massa mola está oscilando com as mesmas características que a primeira simulação, estando na superfície lunar agora, o seu período é alterado? E sua velocidade? E sua aceleração. Justifique.

**Objeto Movimento Harmônico Simples Amortecido/Forçado**

Questão 5 - Abra a “simulacao\_iv”

- a) Observe o gráfico da posição  $x$  do caso 1 e caso 3 existe alguma diferença entre eles? Qual a razão desta diferença?
- b) Qual aplicação diária, podemos ver no cotidiano deste fenômeno físico?
- c) Observe agora o gráfico da posição  $x$  do caso 4, houve uma oscilação completa? qual a diferença do caso 1 e do caso 4? Explique.

### Questão 6- Pessoal e obrigatória

Nesta etapa da prova, a dupla precisa ser sincera, e dizer sua opinião e argumentos a favor ou contra a pergunta que está sendo feita. Caso a dupla tenha opiniões diferentes, pode cada uma exercer de maneira separada na resposta.

- a) O uso de software modellus, permite uma visualização melhor do fenômeno físico estudado? Para que casos vocês acham que ele seria melhor utilizado? Justifique.
- b) Se fosse adotado o uso do software modellus como mais uma maneira de avaliação, acharia viável este modelo?
- c) Você já usou o computador para este tipo de avaliação? Ou avaliação semelhante?
- d) Antes desta avaliação, qual a utilidade do computador na sua vida diária estudantil ou pessoal ?