



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAZONAS -  
IFAM  
CAMPUS MANAUS DISTRITO INDUSTRIAL - CMDI  
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO**

**NOÉ BELTRÃO DA SILVA MARQUES**

**DESENVOLVIMENTO DE UM CONTROLADOR PARA PÊNULO INVERTIDO  
BASEADO NO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO**

MANAUS

2025

NOÉ BELTRÃO DA SILVA MARQUES

**DESENVOLVIMENTO DE UM CONTROLADOR PARA PÊNULO INVERTIDO  
BASEADO NO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Controle e Automação, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, Campus Manaus - Distrito Industrial.

Orientador: Ms. José Fábio de L. Nascimento.

MANAUS

2025

### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

M357d	<p>Marques, Noé Beltrão da Silva. Desenvolvimento de um controlador para pêndulo invertido baseado no regulador linear quadrático / Noé Beltrão da Silva Marques. — Manaus, 2025. 39f.: il. color.</p> <p>Monografia (Graduação) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, <i>Campus</i> Manaus Distrito Industrial, Curso de Engenharia de Controle e Automação, 2025. Orientador: Prof. José Fábio de Lima Nascimento, Me.</p> <p>1. Modelagem dinâmica. 2. Regulador Linear Quadrático. 3. Pêndulo Invertido. I. Nascimento, José Fábio de Lima Nascimento. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 629.89</p>
-------	--

Elaborada por Oziane Romualdo de Souza (CRB11/ nº 734).

## ANEXO 7

### ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 22 dias do mês de abril, de 2025, às 10:00 h, o(a) discente Noé Beltrão da Silva Marques apresentou o seu Trabalho de Conclusão de Curso para avaliação da Banca Examinadora constituída pelos seguintes integrantes: Prof. Me. José Fábio de Lima Nascimento (docente-orientador), Prof. Me. Sandro Lino Moreira de Queiroga (Membro 1) e Prof. Me. Renan Cavalcante Santos (Membro 2). A sessão pública de defesa foi aberta pelo(a) presidente da banca, que apresentou a Banca Examinadora e deu continuidade aos trabalhos, fazendo uma breve referência ao TCC, que tem como título Desenvolvimento de um controlador para pêndulo invertido baseado no regulador linear quadrático. Na sequência, o(a) discente teve até 30 minutos para a comunicação oral de seu trabalho. Cada integrante da banca examinadora fez suas arguições após a defesa do mesmo. Ouvidas as explicações do(a) discente, a banca examinadora, reunida em caráter sigiloso, para proceder à avaliação final, deliberou e decidiu pela Aprovação com média final 6,3 (SEIS, TRÊS)

do referido trabalho.

Foi dada ciência ao(a) discente que a versão final do trabalho deverá ser entregue até o dia 25/04/25, com as devidas alterações sugeridas pela banca. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada às 11 h 30 min, sendo lavrada a presente ata, que, uma vez aprovada, foi assinada por todos os membros da Banca Examinadora e pelo(a) discente.

Prof.(a) Orientador(a)/Presidente:

José Fábio de Lima Nascimento

Prof.(a) Avaliador 1:

Sandro Lino Moreira de Queiroga

Prof.(a) Avaliador 2:

Renan Cavalcante Santos

Discente:

Noé Beltrão da Silva Marques

*Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos pela ajuda durante minha formação acadêmica.*

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Hamilton dos Anjos Marques (*in-memorian*) e Maria Darcy da Silva Marques, por serem exemplos de honestidade e seriedade, por me oferecerem a melhor educação.

A minha família, Aldenora Marques e Heloíse Marques, pelo carinho, apoio e amor.

Ao meu orientador Professor Ms. José Fábio de Lima Nascimento, pelos conhecimentos transmitidos e orientação na elaboração deste projeto; por toda paciência no decorrer do curso.

Aos colegas do Instituto Federal do Amazonas (CMDI-CMC), que apoiaram, de maneira direta ou indireta, no desenvolvimento deste trabalho.

À Deus.

*“Para que o mal triunfe, basta que os bons não façam nada”.*

*Edmund Burke*

## RESUMO

O presente estudo teve como objetivo principal o projeto de um controlador LQR (Linear Quadratic Regulator) para estabilizar um pêndulo invertido em sua posição vertical, minimizando o erro de posição e o consumo de energia de controle, ao mesmo tempo que assegura estabilidade do sistema. Os objetivos específicos incluíram a definição dos parâmetros do motor DC, verificação da estabilidade do sistema, definição da matriz de ganho ótimo  $K$ , determinar o posto e matriz de controlabilidade, bem como simulações em diferentes condições iniciais. A metodologia envolveu a obtenção dos parâmetros de um motor DC por meio de ensaios experimentais, como medições de resistência de armadura, corrente, velocidade angular e momento de inércia. O sistema foi modelado em espaço de estados com base nas equações de Euler-Lagrange, seguido da linearização via expansão em série de Taylor e matriz Jacobiana. O modelo linear resultante foi implementado no ambiente MATLAB/Simulink, onde foi desenvolvido e simulado o controlador LQR. Os resultados demonstraram que o sistema originalmente instável apresentou controlabilidade total (posto da matriz de controlabilidade igual a 4) e foi estabilizado com sucesso. A função de custo associada ao controle foi minimizada com o uso da equação de Riccati, assegurando o equilíbrio entre desempenho e esforço de controle. As simulações comprovaram a robustez do controlador frente a variações paramétricas e perturbações externas, validando a eficácia da abordagem proposta.

**Palavras-chave:** Pêndulo invertido, Regulador Linear Quadrático, Estabilidade, Modelagem dinâmica.

## ABSTRACT

The main objective of this study was to design a Linear Quadratic Regulator (LQR) controller to stabilize an inverted pendulum in its vertical position, minimizing the position error and control energy consumption, while ensuring system stability. The specific objectives included defining the DC motor parameters, verifying the system stability, defining the optimal gain matrix  $K$ , determining the rank and controllability matrix, as well as simulations under different initial conditions. The methodology involved obtaining the parameters of a DC motor through experimental tests, such as measurements of armature resistance, current, angular velocity and moment of inertia. The system was modeled in state space based on the Euler-Lagrange equations, followed by linearization via Taylor series expansion and Jacobian matrix. The resulting linear model was implemented in the MATLAB/Simulink environment, where the LQR controller was developed and simulated. The results demonstrated that the originally unstable system presented full controllability (rank of the controllability matrix equal to 4) and was successfully stabilized. The cost function associated with the control was minimized using the Riccati equation, ensuring a balance between performance and control effort. The simulations proved the robustness of the controller against parametric variations and external disturbances, validating the effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** Inverted pendulum, Linear Quadratic Regulator, Stability, Dynamic modeling.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Modelo eletromecânico do motor CC. ....	17
Figura 2. Determinação da constante de tempo mecânica.....	19
Figura 3. Diagrama de corpo livre do sistema de Pêndulo Invertido.....	20
Figura 4. Controle por realimentação de estados.....	27
Figura 5. Paquímetro utilizado para medição do raio do pinhão do motor .....	31
Figura 6. Medição do peso da haste do pêndulo.....	31
Figura 7. Medição do peso total do carrinho .....	31
Figura 8. Micro motor DC utilizado para medições de seus parâmetros.....	32
Figura 9. Utilização da régua para medição do comprimento da haste do pêndulo do pivô ao centro de gravidade .....	32

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Medição dos valores de tensão, corrente e resistência do motor DC .....	33
Quadro 2. Valores de torque e velocidade angular para regressão linear .....	33
Quadro 3. Especificações do sistema Pêndulo invertido .....	34

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

$J_m$  = Momento de inercia do rotor do motor [ $N. m. s^2 / rad$ ]

$K_e$  = constante *f.c.e.m* [ $V. s / rad$ ]

$K_t$  = constante de torque do motor [ $N. m / A$ ]

$M_c$  = Massa do carrinho [ $K_g$ ]

$R_m$  = Resistência da armadura do motor [ $\Omega$ ]

$x_p$  = x absoluto – centro de gravidade da coordenada do pêndulo.

$y_p$  = y absoluto – centro de gravidade do pêndulo.

$B$  = Coeficiente de amortecimento viscoso do pêndulo [ $N. m. s / rad$ ]

$C$  = Coeficiente de atrito estático para deslocamento do carrinho [ $N / m / s$  ]

$G$  = Constante gravitacional [ $m / s^2$ ]

$I$  = Momento de inércia de massa da haste do pêndulo [ $K_g. m^2$ ]

$L$  = Comprimento do pêndulo [ $m$ ]

$LQR$  = Linear – Quadratic Regulator

$M$  = Massa da haste do pêndulo [ $K_g$ ]

$M$  = Peso total do carrinho [ $K_g$ ]

$R$  = Raio do pinhão do motor [ $m$ ]

$T$  = Energia total do sistema.

$U$  = Energia potencial do sistema.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
1.1	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	14
1.2	OBJETIVO GERAL.....	14
1.3	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	14
1.4	JUSTIFICATIVA DA PESQUISA.....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>16</b>
2.1	PARÂMETROS DO MODELO DO MOTOR CC .....	16
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO APLICANDO EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE.....	19
2.3	PROJETO DO CONTROLADOR LQR.....	27
2.3.1	Teste de estabilidade .....	28
2.3.2	Teste de controlabilidade.....	28
<b>3</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS .....</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E SIMULAÇÃO .....</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>40</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, diversas aplicações, como posicionamento, controle de velocidade variável, tração e alto torque de partida, utilizam motores de corrente contínua devido às suas características específicas. O motor de corrente contínua é um conversor eletromecânico com propriedades bastante lineares, tornando-se um componente essencial em sistemas de controle (Krishnan, 2001).

De acordo com Ogata (2010), as principais abordagens de controle utilizadas são: teoria de controle clássico (ou convencional), a teoria de controle moderno e a teoria de controle robusto. O controle automático desempenha um papel fundamental em sistemas como veículos espaciais, robótica, sistemas de manufatura avançada e em qualquer processo industrial que envolva o gerenciamento de variáveis como temperatura, pressão, umidade, viscosidade e vazão.

Dorf et al. (2001) afirmam que, para entender e gerenciar sistemas complexos, é necessário desenvolver modelos matemáticos quantitativos desses sistemas. Dado que esses sistemas são, por natureza, dinâmicos, as equações que os descrevem são tipicamente equações diferenciais. Quando é possível linearizar essas equações, a Transformada de Laplace pode ser empregada para facilitar o processo de resolução. No entanto, devido à complexidade desses sistemas, frequentemente é necessário introduzir suposições sobre o funcionamento dos mesmos para que a linearização seja viável.

Dentro da teoria de controle moderno, o Regulador Linear Quadrático (LQR) é um controlador ideal que visa minimizar uma função custo (Michurin; Schagin, 2018). A função de custo no LQR é quadrática, ou seja, depende de maneira quadrática dos estados do sistema e da entrada de controle. Normalmente, os valores das matrizes  $Q$  e  $R$  são ajustados por meio de métodos iterativos. O número de elementos dessas matrizes está relacionado ao número de entradas e à dimensão do vetor de estados. Após a definição dos elementos de estado do sistema e da entrada de controle, o ganho da lei de controle ótimo por realimentação de estados pode ser obtido diretamente a partir da solução da equação de Ricatti (Ogata, 2010).

Dentre os sistemas amplamente utilizados para estudo e validação de técnicas de controle, destaca-se o pêndulo invertido, um sistema dinâmico não linear que representa um desafio clássico no controle automático devido à sua instabilidade intrínseca e comportamento altamente sensível a perturbações. A modelagem e o

controle desse sistema são frequentemente empregados como base para o desenvolvimento de controladores aplicáveis a sistemas robóticos, veículos autônomos, e outros dispositivos que exigem equilíbrio dinâmico. Neste contexto, o presente trabalho se propõe a projetar e simular um controlador LQR para estabilizar o pêndulo invertido, utilizando parâmetros obtidos experimentalmente de um motor de corrente contínua e modelagem matemática em espaço de estados, com o objetivo de validar a eficácia dessa abordagem frente às exigências de desempenho e robustez.

### 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O problema consiste em projetar um controlador LQR para um pêndulo invertido, considerando a identificação das variáveis de entrada e saída, bem como os estados do sistema, como a posição e velocidade. Além disso, envolve a linearização do sistema, a definição de uma função de custo quadrática, a solução da Equação de Riccati para encontrar a matriz de ganho  $K$  e a implementação da lei de controle  $u(t) = -K.x(t)$ . É necessário determinar as limitações do sistema e as condições iniciais para garantir a validação do modelo e a eficácia do controlador.

### 1.2 OBJETIVO GERAL

Projetar um controlador LQR capaz de estabilizar o pêndulo invertido em sua posição vertical, minimizando o erro de posição e o consumo de energia de controle, ao mesmo tempo que assegura a robustez e a estabilidade do sistema.

### 1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para alcançar o objetivo geral foram definidos objetivos específicos descritos abaixo:

- a) Definir os parâmetros do motor DC para o projeto do sistema do pêndulo invertido.
- b) Determinar os autovalores da Matriz  $A$  (teste de estabilidade) do sistema projetado;
- c) Determinar a matriz e posto de controlabilidade do sistema.

- d) Definir a matriz de ganho ótimo  $K$  de realimentação do sistema projetado.
- e) Realizar simulações do sistema considerando diferentes condições iniciais para avaliar seu comportamento em cenários variados.

#### 1.4 JUSTIFICATIVA DA PESQUISA

O trabalho justifica-se pela necessidade de validar o modelo matemático empregado na modelagem do sistema do pêndulo invertido, garantindo a sua fidelidade para aplicações práticas e contribuindo para a compreensão do comportamento dinâmico de sistemas instáveis. O pêndulo invertido é um sistema didaticamente relevante, frequentemente utilizado como referência no desenvolvimento e teste de algoritmos de controle, devido à sua complexidade e desafio inerente de manutenção do equilíbrio. Nesse contexto, a aplicação do controlador LQR se destaca por oferecer uma solução ótima baseada em critérios de desempenho, promovendo não apenas a estabilidade do sistema, mas também a minimização do esforço de controle, algo essencial em sistemas embarcados e de tempo real.

Ademais, este estudo permite explorar a integração entre teoria e prática ao aplicar um modelo matemático idealizado a um sistema real, com parâmetros obtidos por meio de ensaios experimentais de um motor DC. Essa abordagem favorece a análise da precisão dos modelos e a avaliação da robustez do controlador frente a incertezas e perturbações, aproximando a pesquisa de situações reais enfrentadas na indústria e na engenharia de sistemas de controle. A otimização dos parâmetros do controlador, por meio do ajuste das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , proporciona ainda a oportunidade de estudar o impacto direto dessas variáveis na resposta do sistema, contribuindo para a formação de profissionais mais capacitados a lidar com sistemas complexos e a projetar soluções eficazes em controle automático. Portanto, a presente pesquisa é de grande relevância acadêmica e prática, oferecendo subsídios tanto para o avanço científico quanto para a aplicação em contextos industriais e educacionais.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção serão abordados os assuntos que suportam a pesquisa: parâmetros de um motor CC, modelagem de um sistema de Pêndulo Invertido, linearização do modelo não linear do sistema e projeto do controlador LQR.

### 2.1 PARÂMETROS DO MODELO DO MOTOR CC

O motor de corrente contínua CC foi uma das primeiras máquinas idealizadas para converter potência elétrica em potência mecânica, idealizada inicialmente por Michael Faraday. Até 1880, estas máquinas elétricas foram bastante utilizadas e aperfeiçoadas, quando a principal forma de energia era em corrente contínua. Neste momento, certas aplicações (tais como: posicionamento, velocidade variável, tração, alto torque de partida, etc.) fazem o uso de motores de corrente contínua devido as suas características que justificam o seu alto custo. Sendo o motor de corrente contínua um dispositivo conversor eletromecânico com características bastantes lineares, ele é um componente importante em sistemas de controle em uso (Krishna, 2001).

Conforme Oliveira, Aguiar e Vargas (2005) nos motores de corrente continua, a estrutura girante (rotor) recebe a denominação de armadura, enquanto que na parte fixa (estator) fica situado o campo magnético. Baseado na constituição e princípio de operação do motor de corrente contínua como descrito acima, pode-se identificar vários parâmetros para o modelo desse motor CC. O motor de corrente contínua é composto por um conjunto de espiras que constitui a armadura. Estas espiras caracterizam uma resistência elétrica de armadura denominada  $R_a$  e também uma indutância de armadura denominada  $L_a$ . A tensão induzida nas espiras pode ser deduzida como sendo diretamente proporcional a velocidade de velocidade angular  $\omega(t)$  desde que  $\vec{B}, l, d$  sejam constantes. Portanto:

$$e(t) = K_e \cdot \omega(t) \quad (1)$$

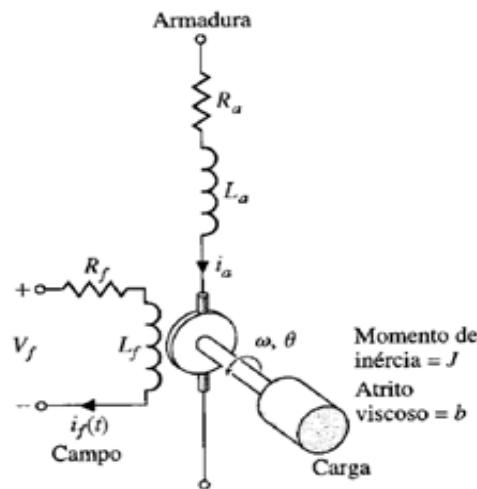
No qual,  $K_e$  é denominada constante de força contra-eletromotriz (fcem). Por motivo de  $\vec{B}, l, d$  e  $\theta$  serem constantes, obtém-se que o torque no motor de corrente

continua é diretamente proporcional a intensidade da corrente que circula na armadura, logo tem-se:

$$T = k_t \cdot i_a \quad (2)$$

Onde  $k_t$  é denominada constante de torque e  $i_a$  é a corrente instantânea de armadura. A estrutura que compõe a armadura representa uma massa em velocidade angular e define-se para ela: momento de inércia  $J$ , coeficiente de atrito viscoso  $B$ , e o coeficiente de atrito estático  $F$ .

Figura 1. Modelo eletromecânico do motor CC.



Fonte: Dorf e Bishop (2001).

Através do diagrama eletromecânico do motor de corrente contínua da figura 1. Obtém-se o seguinte equacionamento dinâmico do motor nas equações 3 e 4.

$$V_f = R_a \cdot i_a + L_a \frac{d}{dt} i_a + K_e \omega \quad (3)$$

$$T(t) = J \frac{d}{dt} \omega(t) + B \omega(t) + F \quad (4)$$

Para determinação de cálculos, a constante  $K_e = K_t = K$  assumem valores de mesma magnitude. Onde  $K$  é a constante do motor. Segundo Oliveira, Aguiar e Vargas (2005), foram realizados ensaios para determinar parâmetros elétricos e mecânicos do motor DC.

Aplica-se uma tensão gradativamente e utilizando a equação da Lei de Ohms calcula-se  $R_a$ .

$$V_a = I_a \times R_a \quad (5)$$

Para determinar a constante  $K_e$ , deve-se anular  $L_a \frac{d}{dt} i_a = 0$  da equação (3).

Para isso, basta deixar o motor com uma tensão constante e velocidade constante obtendo:

$$K_e = \frac{V(t) - R \cdot i(t)}{w(t)} \quad (6)$$

Para estabelecer os coeficientes de atrito estático  $F$  e viscoso  $B$ , admitiu-se que a potência entregue pela fonte é completamente consumida para transpor as perdas por atrito viscoso e estático (perdas rotacionais) mais as perdas ôhmicas da armadura. Supõe-se que  $\frac{d_i}{dt} = 0$  e  $\frac{d_w}{dt} = 0$ .

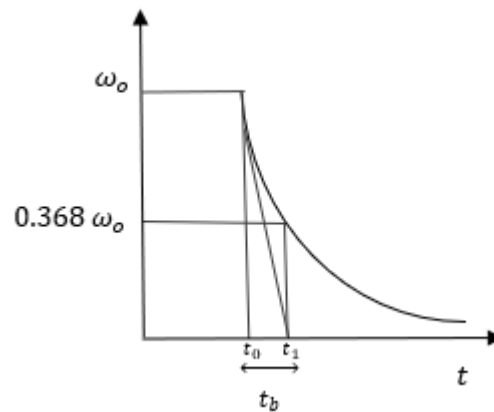
$$T_r = \frac{V_a - R_a \cdot I_a}{w_t} = F + Bw \quad (7)$$

Com os valores de  $I_a, V_a, \omega$  e  $R_a$ , calcula-se o torque resistivo  $T_r$ . E com a curva torque resistivo em função da velocidade angular  $T_r \times w$  encontra-se os coeficientes de atrito viscoso  $B$  e estático  $F$ . Calcula-se analiticamente por regressão linear os valores dos coeficientes da equação da reta.

Para determinar o momento de inércia  $J$  realiza-se um procedimento experimental, aplicando uma tensão de 12V aos terminais do motor até entrar em regime permanente, desliga o motor e verifica-se a dinâmica de desaceleração. Com o auxílio de um tacômetro, monitora-se a velocidade angular do eixo do motor até que atingisse  $\omega = 0,386 \cdot \omega_o$ , onde  $\omega_o$  é a velocidade inicial antes de ser retirada a alimentação do motor. O intervalo de tempo entre  $\omega_o$  e o repouso tem uma relação com a constante de tempo mecânica.

$$J = B \cdot \tau_b \quad (8)$$

Figura 2. Determinação da constante de tempo mecânica



Fonte: Oliveira, Aguiar e Vargas (2005).

Para cálculo do Momento de inércia da haste do pêndulo, o centro de velocidade angular localiza-se na extremidade da haste. Portanto, a equação utilizada é a seguinte:

$$I = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \quad (9)$$

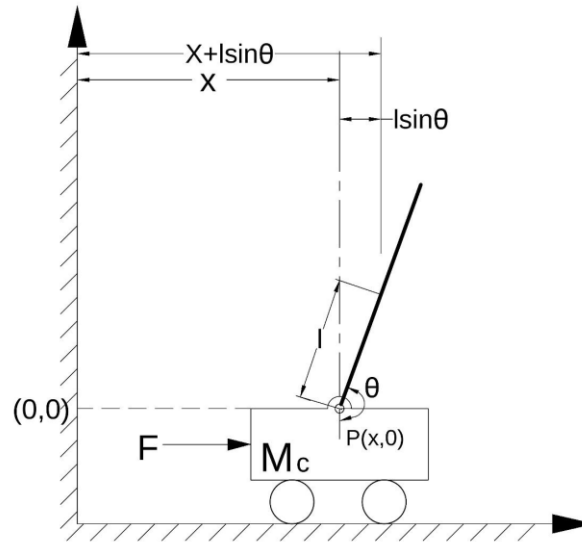
## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA DE PÊNDULO INVERTIDO APLICANDO EQUAÇÕES DE EULER-LAGRANGE.

De acordo com Singh (sd), a modelagem, linearização do modelo não linear do sistema dinâmico do pêndulo invertido segue o procedimento de aplicar as leis de Euler-Lagrange para obter as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema. Em seguida, utiliza-se a expansão em série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio, geralmente o ponto de equilíbrio vertical instável, para linearizar essas equações. Esse processo resulta em um modelo linear de espaço de estados que facilita o projeto e a análise de controladores lineares para estabilização do sistema.

Para a obtenção dessas equações diferenciais, é essencial a construção do diagrama de corpo livre (DCF) tanto do carro quanto do pêndulo. O diagrama do carro considera as forças aplicadas horizontalmente, como a força de controle, a força de atrito e a força resultante do movimento do pêndulo. Já o diagrama do pêndulo considera as forças gravitacionais, a força de reação do pivô, além da força centrífuga e a força tangencial causadas pela aceleração do sistema. Esses diagramas são fundamentais para representar visualmente as forças atuantes em cada corpo do

sistema, permitindo aplicar corretamente as leis da dinâmica e, a partir disso, derivar as equações que descrevem o comportamento do pêndulo invertido em movimento (Singh, sd).

Figura 3. Diagrama de corpo livre do sistema de Pêndulo Invertido



Fonte: Rifford (2014)

Demonstrando a cinemática do sistema:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + l \operatorname{sen}\theta \\ -l \operatorname{cos}\theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

A função não relativística Lagrangiana para um sistema de partículas pode ser representado por:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (11)$$

A energia cinética total do sistema é a soma da energia cinética translacional ( $T_t$ ) e rotacional ( $T_r$ )

$$T = T_t + T_r \quad (12)$$

A energia cinética translacional total é descrita por:

$$T_t = T_{t_c} + T_{t_p} \quad (13)$$

A energia cinética translacional do carro é dada por:

$$T_{t_c} = \frac{1}{2} M_c \dot{x}^2 \quad (14)$$

A energia cinética translacional do pêndulo é dada por:

$$T_{t_p} = \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{dx_p}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_p}{dt} \right)^2 \right] \quad (15)$$

Substituindo a equação (10) na equação (15) e resolvendo:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} m \left[ \left( \frac{d}{dt} (x + l \operatorname{sen} \theta) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} (-l \operatorname{cos} \theta) \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta)^2 + (-(l \dot{\theta} (-\operatorname{sen} \theta)))^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta)^2 + (l \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ \dot{x}^2 + \dot{x} l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + \dot{x} l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{cos}^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ \dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + l^2 \dot{\theta}^2 (\operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) \right] \end{aligned}$$

Observando a identidade trigonométrica  $\operatorname{cos}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$ :

$$= \frac{1}{2} m \left[ \dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right]$$

Obtemos:

$$T_{t_p} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta \quad (16)$$

Substituindo as equações (14), (16), na equação (13) temos:

$$T_t = \frac{1}{2} M_c \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \operatorname{cos} \theta \quad (17)$$

A energia cinética rotacional é dada por:

$$T_r = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (18)$$

Portanto, a energia cinética total do sistema, das equações (12), (17) e (18) são:

$$T = \frac{1}{2}M_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (19)$$

Energia potencial total do sistema:

$$U = -mgl \cos\theta \quad (20)$$

Substituindo as equações (19) e (20) na equação (11) Lagrangiana temos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \quad (21)$$

O sistema tem 2 graus de liberdade, portanto existem duas equações lagrangianas de movimento.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -b\dot{\theta} \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = F - c\dot{x} \quad (23)$$

Das equações (21), (22) e (23), a lagrangiana produz a equação de movimento:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = -b\dot{\theta} \quad (24)$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F - c\dot{x} \quad (25)$$

Representação linear em espaço de estado do sistema Pêndulo Invertido, assim, isolando  $\ddot{x}$  da equação (24) temos:

$$\ddot{x} = \frac{-b\dot{\theta} - mgl\sin\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{ml\cos\theta}$$

E substituindo na equação (25).

$$(M + m)\left(\frac{-b\dot{\theta} - mgl\sin\theta - (I + ml^2)\ddot{\theta}}{ml\cos\theta}\right) + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F - c\dot{x}$$

$$(M + m)(-b\dot{\theta} - mgl\sin\theta) + (M + m)(-I\ddot{\theta} - ml^2\ddot{\theta}) + m^2l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = T$$

$$T = F - c\dot{x} = Fml\cos\theta - c\dot{x}ml\cos\theta$$

$$N = (M + m)(-b\dot{\theta} - mgl\sin\theta)$$

$$N + (M + m)(-I\ddot{\theta} - ml^2\ddot{\theta}) + m^2l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = T$$

$$N - MI\ddot{\theta} - Mml^2\ddot{\theta} - ml\ddot{\theta} - m^2l^2\ddot{\theta} + m^2l^2\ddot{\theta}\cos^2\theta - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = T$$

$$N - \ddot{\theta}(M + m)I - Mml^2\ddot{\theta} - m^2l^2\ddot{\theta}(1 - \cos^2\theta) - m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = T$$

Substituindo  $N, T$  a identidade trigonométrica  $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$  e isolando  $\ddot{\theta}$  :

$$\ddot{\theta} = \frac{-(Fml\cos\theta - cml\dot{x}\cos\theta + m^2l^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M + m)(b\dot{\theta} + mgl\sin\theta))}{m^2l^2\sin^2\theta + Mml^2 + (M + m)I} \quad (26)$$

Da mesma forma, isolamos  $\ddot{\theta}$  da equação (25).

$$\ddot{\theta} = \frac{F - c\dot{x} - (M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{ml\cos\theta}$$

E substituindo na equação (24), resolvendo

$$(I + ml^2) \left( \frac{F - c\dot{x} - (M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta}{ml\cos\theta} \right) + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = -b\dot{\theta}$$

$$(I + ml^2)(F - c\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta) + (I + ml^2)(-M\ddot{x} - m\ddot{x}) + m^2l^2\ddot{x}\cos^2\theta + m^2gl^2\sin\theta\cos\theta = Y$$

$$Y = -b\dot{\theta}ml\cos\theta$$

$$H = (I + ml^2)(F - c\dot{x} + ml\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$H - MI\ddot{x} - ml\ddot{x} - Mml^2\ddot{x} - m^2l^2\ddot{x} + m^2l^2\ddot{x}\cos^2\theta + m^2gl^2\sin\theta\cos\theta = Y$$

$$H - \ddot{x}(M + m)I - Mml^2\ddot{x} - m^2l^2\ddot{x}(1 - \cos^2\theta) + m^2gl^2\sin\theta\cos\theta = Y$$

Representando a identidade trigonométrica  $\sin^2 = 1 - \cos^2$ ,  $Y$  e  $H$ . Obtém-se a separação de  $\ddot{x}$ :

$$\ddot{x} = \frac{bml\dot{\theta} \cos \theta + m^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta + (I + ml^2)(F - c\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta)}{m^2 l^2 \sin^2 \theta + Mml^2 + (M + m)I} \quad (27)$$

Correspondendo as equações em forma de espaço de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \theta \\ x_3 &= \dot{x} \therefore \dot{x}_3 = \ddot{x} \\ x_4 &= \dot{\theta} \therefore \dot{x}_4 = \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis de estado nas equações (26) e (27) obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{(bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} \end{aligned}$$

Representando a equação em espaço de estados do sistema não linear:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

$$\dot{X} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_3 & & & \\ x_4 & & & \\ \frac{(bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \sin x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} & & & \\ \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \sin x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \sin x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \sin^2 x_2} & & & \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Y = CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Temos que linearizar o sistema não linear em torno do ponto estacionário vertical.

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{(bmlx_4 \cos x_2 + m^2 l^2 g \operatorname{sen} x_2 \cos x_2 + (I + ml^2)(F - cx_3 + mlx_4^2 \operatorname{sen} x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \operatorname{sen}^2 x_2} \\ \frac{-(Fml \cos x_2 - cmlx_3 \cos x_2 + m^2 l^2 x_4^2 \operatorname{sen} x_2 \cos x_2 + (M + m)(bx_4 + mgl \operatorname{sen} x_2))}{Mml^2 + (M + m)I + m^2 l^2 \operatorname{sen}^2 x_2} \end{bmatrix}$$

Linearização usando expansão da série de Taylor e Matriz Jacobiana, temos o modelo não linear:

$$\dot{X} = f(X, U),$$

Para encontrar um modelo linear “local” em torno de um ponto de operação usamos:

$$(X_0, U_0) \rightarrow (X = X_0 + \delta X, \quad U = U_0 + \delta U)$$

$$\delta \dot{X} = f(X_0 + \delta X, \quad U_0 + \delta U)$$

Usando a expansão da Série de Taylor

$$\delta \dot{X} = f(X_0, U_0) + \frac{\partial f}{\partial X}(X_0, U_0) \delta X + \frac{\partial f}{\partial U}(X_0, U_0) \delta U + H. O. T$$

Pontos de operação

$$f(X_0, U_0) = 0$$

Ponto de referência

$$(X_0, U_0) = ([0 \ \pi \ 0 \ 0], 0)$$

E desprezando “HOT”

$$\delta \dot{X} = A \delta X + B \delta U$$

$$Y = C \delta X$$

Adotando  $\delta X \cong X, \delta U \cong U$  temos:

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX$$

Onde:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{(x_0, u_0)}, B = \left. \frac{\partial f}{\partial U} \right|_{(x_0, u_0)}$$

É realizado a linearização do modelo não linear em torno do ponto de referência:

$$A = \left. \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{array} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)c}{\alpha} & \frac{-bml}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M + m)}{\alpha} & \frac{-mlc}{\alpha} & \frac{-b(M + m)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Onde a entrada U representa F (força):

$$U = F$$

$$\alpha = I(M + m) + Mml^2$$

$$B = \left. \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F} \\ \frac{\partial f_3}{\partial F} \\ \frac{\partial f_4}{\partial F} \end{array} \right|_{(x_0, u_0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{\alpha} \\ \frac{ml}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Modelo de estado de espaço linear, com  $F$  (força) como entrada  $U$ .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I + ml^2)c}{\alpha} & \frac{-bml}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M+m)}{\alpha} & \frac{-mlc}{\alpha} & \frac{-b(M+m)}{\alpha} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I + ml^2)}{\alpha} \\ \frac{ml}{\alpha} \end{bmatrix} F \quad (29)$$

A força aplicada no carrinho é representada por  $F$ , a relação entre a tensão  $V_m$  e a força aplicada está representada na equação abaixo.

$$F = \frac{k_t V_m r - k_t k_b \dot{x}}{R_m r^2} = \frac{k_t V_m r - k_t k_b x_3}{R_m r^2} \quad (30)$$

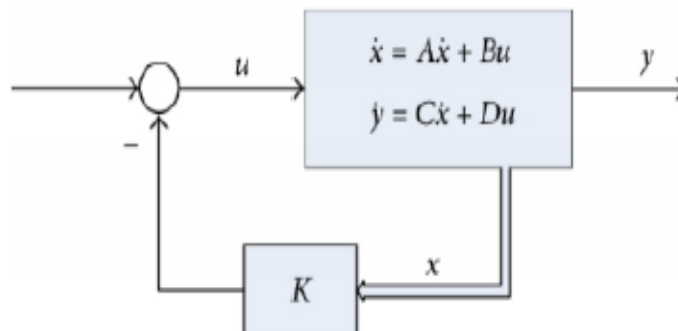
Das equações (29) e (30) obtemos o modelo final do espaço de estado linear com  $V_m$  (tensão) como entrada  $U$ .

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{m^2 l^2 g}{\alpha} & \frac{-(I+ml^2)}{\alpha} \left( c + \frac{k_t + k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{-bml}{\alpha} \\ 0 & \frac{mgl(M+m)}{\alpha} & \frac{-ml}{\alpha} \left( c + \frac{k_t k_b}{R_m r^2} \right) & \frac{-b(M+m)}{\alpha} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(I+ml^2)k_t}{\alpha R_m r} \\ \frac{mlk_t}{\alpha R_m r} \end{bmatrix} V_m$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

### 2.3 PROJETO DO CONTROLADOR LQR

Figura 4. Controle por realimentação de estados



### 2.3.1 Teste de estabilidade

Os autovalores da matriz de estado do sistema  $A$  podem determinar a estabilidade do sistema através dos polos da função de transferência do mesmo. Analisando o sistema em malha aberta para verificar se o sistema é estável ou não.

Onde:

$$AI = \lambda I$$

$\lambda$  é o autovalor e  $I$  é o autovetor. Pode-se dizer que os autovalores nos dizem como a matriz  $A$  age em diferentes direções (autovetores). Os valores de  $s$  são os autovalores da matriz  $A$  onde  $\det(sI - A) = 0$ . O sistema é considerado estável se a parte real de todos os seus autovalores deve estar na metade esquerda do plano  $s$ , como um número negativo.

### 2.3.2 Teste de controlabilidade

Para sistemas lineares invariantes no tempo LIT, um sistema é atingível se, e somente se, sua matriz de controlabilidade  $\xi$  tiver um posto de linha completo de  $p$ .

Onde  $p$  é a dimensão da matriz  $A$  e  $p \times q$  é a dimensão da matriz  $B$ :

$$\xi = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{p-1}B] \in R^{p \times pq}$$

Um sistema é controlável quando o posto da matriz do sistema  $A$  é  $p$  e o posto da matriz de controlabilidade é igual a:

$$\text{Rank}(\xi) = \text{Rank}(A^{-1}\xi) = p$$

A lei de controle de realimentação de estado completo:

$$V_m = -KX$$

$$K = R^{-1}B^T P$$

$$V_m = -R^{-1}B^T P X$$

$P$  é a solução da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

### 3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Foram realizados ensaios em laboratório, com o objetivo de obter os parâmetros do motor DC, necessários para o modelo final linear do sistema dinâmico do pêndulo invertido. Para determinar a corrente de armadura do motor, utilizou-se um amperímetro conectado em série com o motor DC. Aplicando tensões gradativas ao motor mediu-se vários valores de corrente. Desta forma, os valores de tensão e corrente, foram substituídos na equação 5, obtendo diversos valores de resistência e aplicando uma média aritmética resultando na resistência de armadura  $R_m$ . Conforme quadro 3.

Os valores da constante  $K_e$ , foram obtidos por média aritmética. A aplicação de degraus de tensão serviu para reunir os valores de corrente na armadura, tensões e velocidades angulares do eixo. A tensão foi aplicada de forma gradativa, variando de 0 a 12 VDC, e a velocidade angular do eixo do motor foi aferida com o auxílio de um tacômetro digital,

Com base na equação (7), os coeficientes de atrito viscoso (B) e estático (C) foram determinados por meio de regressão linear, utilizando um algoritmo computacional para ajustar os dados experimentais à equação da reta.

Para o cálculo do momento de inércia, foi aplicada uma tensão constante de 12 V nos terminais do motor DC, obtendo-se uma velocidade angular em regime permanente de  $\omega_o = 1786 \text{ rad/s}$ . Em seguida, foi identificado o ponto correspondente a 38,6% da velocidade inicial  $\omega_o$  (aproximadamente)  $689 \text{ rad/s}$ . e, com o auxílio de um temporizador, foi aferido o tempo necessário para o motor atingir essa condição após o desligamento da tensão. Esse tempo corresponde à constante de tempo mecânica  $\tau_b$ , estimada em aproximadamente 2 segundos.

Conforme a Figura 5 para medição do raio do pinhão do motor, utilizou-se um paquímetro que mensurou aproximadamente 0,006 m.

Figura 5. Paquímetro utilizado para medição do raio do pinhão do motor



Para mensurar o peso da haste do pêndulo (figura 6) e peso total do carrinho (figura 7) utilizou-se uma balança de precisão modelo SF-400, conforme figura X e Y abaixo.

Figura 6. Medição do peso da haste do pêndulo



Figura 7. Medição do peso total do carrinho



A figura 8 demonstra o micro motor DC utilizado para medições de seus parâmetros. É o modelo AK555/390ML12S18200C da fabricante Akiyama Motors.

Figura 8. Micro motor DC utilizado para medições de seus parâmetros



Para mensurar o comprimento da haste do pêndulo do pivô ao centro de gravidade, utilizou-se uma régua de medição conforme figura 9.

Figura 9. Utilização da régua para medição do comprimento da haste do pêndulo do pivô ao centro de gravidade



#### 4 RESULTADOS E SIMULAÇÃO

Quadro 1. Medição dos valores de tensão, corrente e resistência, e velocidade angular do motor DC

$V_f$ (V)	$I_a$ (A)	$R_m$ ( $\Omega$ )	$\omega$ [rad /s]
1	0,63	1,587	83,356
2	0,65	3,076	218,854
3	0,67	4,477	365,157
4	0,72	5,555	583,184
5	0,75	6,666	698,690
6	0,73	8,219	887,604
7	0,74	9,459	1015,781
8	0,76	10,526	1159,247
9	0,79	11,392	1307,007
10	0,80	12,5	1587,342
11	0,82	13,414	1641,796
12	0,88	13,636	1785,890

Com o motor em repouso e no vazio utilizou-se um multímetro e aferiu-se valor de indutância  $L_a = 4,28 \text{ mH}$ .

Com auxílio de um tacômetro digital, aferiu-se vários valores de velocidade angular pra cada degrau de tensão. Obtendo assim o valor médio  $w(t) = 944,492 \text{ rad/s}$ .

O valor da constante de *f. c. e. m* é  $K_e = 1,354 \cdot 10^{-5} \text{ Vs/rad}$ . As constantes  $K_e, K_t$  e  $K$  assumem valores de mesma grandeza.

Os valores de torque resistivo e velocidade angular estão no Quadro 2.

Quadro 2. Valores de torque e velocidade angular para regressão linear

$T_r$	$\omega$ (rad/s)
$1,781 \cdot 10^{-6}$	218,854
$4,937 \cdot 10^{-7}$	583,184
$1,068 \cdot 10^{-7}$	887,604
$1,573 \cdot 10^{-7}$	1159,247
$8,2 \cdot 10^{-5}$	1587,342
$1,576 \cdot 10^{-7}$	1785,840

Os valores calculados por regressão linear para atrito estático e atrito viscoso representam  $C = -1.131 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$  e  $B = 2.447 \cdot 10^{-8} \text{ Nm/rads}^{-1}$ .

Substituindo os valores da constante de tempo mecânica e coeficiente de atrito viscoso na equação (8) obtemos o momento de inércia  $J_M = 3,934 \cdot 10^{-8} \text{ Nms}^2/\text{rad}$ .

De acordo com a equação (9), momento de inércia da haste do pêndulo  $I = 0,0084 \text{ Kg m}^2$ .

Quadro 3. Especificações do sistema Pêndulo invertido

Símbolo	Descrição	Variável no Matlab	Valores com unidades
$L$	Comprimento do pêndulo do pivô ao centro de gravidade	$L$	0,56 m
$M_c$	Massa do carro	$M_c$	0,675 Kg
$m$	Massa da haste do pêndulo	$m$	0,080 Kg
$J_M$	Momento de inércia do rotor do motor	$J_M$	$3,934 \cdot 10^{-8} \text{ Nms}^2/\text{rad}$
$K_t$	Constante de torque do motor	$K_t$	0,00044 N.m / A
$K_e$	Constante fem do motor	$K_e$	0,00044 V.s / rad
$R_m$	Resistência de armadura do motor	$R_m$	8,724 $\Omega$
$R$	Raio do pinhão do motor	$R$	0,006 m
$I$	Momento de Inércia da haste do pêndulo	$I$	0,0084 Kg.m <sup>2</sup>
$C$	Coeficiente de atrito estático para deslocamento do carrinho	$C$	$-1,131 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}$
$B$	Coeficiente de atrito viscoso no Ponto de velocidade angular (Pivô) do pêndulo	$B$	$2,447 \cdot 10^{-8} \text{ Nm/rad.s}^{-1}$
$G$	Constante gravitacional	$G$	9,81 m/s <sup>2</sup>
$M$	Peso total do carrinho, incluindo inércia do motor	$M$	0,676 Kg

Substituindo os parâmetros obtidos do motor DC na equação do modelo linear final temos:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,817 & 5,289 \cdot 10^{-5} & -4,716 \cdot 10^{-8} \\ 0 & 14,276 & 2,177 \cdot 10^{-5} & -7,948 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6,070 \cdot 10^{-10} \\ 2,492 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix} V_m$$

Código de implementação por regressão linear para obter as constantes  $B$  e  $C$ .

```

clear all
clc
Tr =[1.781*10^-6 4.937*10^-7 1.068*10^-7 1.573*10^-7 8.2*10^-5 1.576*10^-7]
w=[218.854 583.184 887.604 1159.247 1587.342 1785.840]
p1= polyfit(x,y,1)
plot(x,y,'o')
hold on
plot (x,polyval(p1,x),'g--')
yfit= p1(1)*x + p1(2);
yresid= y - yfit;
SQresid = sum(yresid.^2);
SQtotal= (length(y)-1)* var(y);
R2= 1- (SQresid/SQtotal)

```

### Código de implementação do sistema dinâmico do Pêndulo invertido.

```

% Modelo linear do sistema dinâmico

Close all

A= [0      0      1      0;
    0      0      0      1;
    0      0.817  5.289*10^-5  -4.716*10^-8;
    0      14.276  2.171*10^-5  -7.948*10^-7]

B= [0;
    0;
    6.070*10^-10;
    2.492*10^-10]

C= [1 0 0 0;
    0 1 0 0;
    0 0 1 0;
    0 0 0 1]

D= [0;
    0;
    0;
    0]

%Penaliza os estados do sistema

Q = [1 0 0 0;
     0 1 0 0;
     0 0 1 0;
     0 0 0 1]

```

```

% Penaliza o esforço de controle

R = 0.1

% Determina os autovalores da Matriz A (Teste de estabilidade)
Poles=eig(A)
Poles =
    0
   -3.7784
    3.7784
    0.0001

% Matriz de controlabilidade

zeta= ctrb(A,B)
zeta =
  1.0e-08 *
    0    0.0607    0.0000    0.0204
    0    0.0249    0.0000    0.3558
  0.0607    0.0000    0.0204    0.0000
  0.0249    0.0000    0.3558    0.0000

% Posto da matriz de controlabilidade
rank=rank (zeta)
rank =
    4

% Matriz de ganho K ótima de realimentação

K =
  1.0e+11 *
   -0.0000    1.1458   -0.0000    0.3032

% Matriz definida positiva P de solução da equação de Riccati

P =
  1.0e+20 *
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    1.7372   -0.0000    0.4598
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.4598   -0.0000    0.1217

```

```
% Espaço de estado em Malha fechada
```

```
sys=ss((A-B*K),B,C,D)
```

```
A =
```

	x1	x2	x3	x4
x1	0	0	1	0
x2	0	0	0	1
x3	1.92e-09	-68.73	8.205e-05	-18.41
x4	7.88e-10	-14.28	3.368e-05	-7.557

```
B =
```

	u1
x1	0
x2	0
x3	6.07e-10
x4	2.492e-10

```
C =
```

	x1	x2	x3	x4
y1	1	0	0	0
y2	0	1	0	0
y3	0	0	1	0
y4	0	0	0	1

```
D =
```

	u1
y1	0
y2	0
y3	0
y4	0

Logo, foi proposto neste trabalho o projeto de um controlador *LQR* para estabilizar o pêndulo invertido. Para isso, um modelo matemático linear final foi proposto da literatura e os parâmetros do motor foram calculados para serem utilizados no ambiente computacional para simulação de estabilidade, controlabilidade e matriz de ganho  $K$ . Conforme o quadro 1, para cada degrau de tensão da fonte aplicado no motor DC, foram mensurados vários valores de corrente, resistência e velocidade angular. Esses valores serviram para calcular outros parâmetros do motor: constante de força contra-eletromotriz (fcem)  $K_e$ , constante de torque  $K_t$ , Torque resistivo  $T_r$ . No quadro 2, os valores de torque resistivo foram obtidos através da equação 7 e os valores da velocidade angular foram mensurados pelo dispositivo tacômetro. Com estes valores, foi construído um algoritmo por regressão linear no ambiente Matlab para aquisição dos coeficientes de atrito viscoso  $B$  e estático  $F.A$ . A aquisição dos parâmetros do motor, foram substituídos no modelo linear final.

As matrizes  $Q$  e  $R$  são matrizes que definem o critério de desempenho do sistema. A matriz diagonal  $Q$  pondera a importância dos estados do sistema: posição, velocidade do carro, ângulo e velocidade angular do pêndulo. Na matriz escalar  $R$  pondera a importância de entrada de controle, ou seja, a força aplicada ao carro. A escolha de  $Q$  e  $R$  é um processo de tentativa e erro que depende do desempenho desejado do sistema.

Os valores dos polos  $poles = eig(A)$  da matriz  $A$  indica que um dos valores está localizado ao lado direito do plano  $s$ , indicando que o sistema é instável. Enquanto a matriz de controlabilidade verifica se é possível controlar o pêndulo invertido para alcançar um estado desejado. Nesse caso, a matriz tem o posto completo  $rank = 4$ , significa que o sistema é controlável.

A matriz de controlabilidade  $K$  é multiplicada pelo estado do sistema para calcular a entrada de controle e pode ser ajustada para otimizar a resposta do sistema e minimizar o erro. Ou seja, é uma ferramenta crucial para controlar o pêndulo invertido e estabilizar o sistema. Ela define a ação de controle necessária para manter o pêndulo na posição vertical.

A metodologia utilizada nesse projeto pode ser implementada em sistemas reais: como robôs, veículos automotivos, sistemas de controle de processos. Pode ser utilizada para controle de sistemas não lineares: adaptar o controlador LQR para sistemas não lineares, utilizando técnicas de linearização ou controle não linear. É possível integrar com outras técnicas de controle: controle preditivo ou adaptativo, para melhorar o desempenho do sistema. O campo de controle é vasto, há muitas aplicações e oportunidades para pesquisa e desenvolvimento.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados obtidos, é possível concluir que os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados com êxito. O objetivo geral de projetar um controlador LQR capaz de estabilizar o pêndulo invertido em sua posição vertical foi atendido, com sucesso na minimização do erro de posição e no consumo de energia de controle. Além disso, o sistema demonstrou robustez e estabilidade por meio das análises realizadas.

Quanto aos objetivos específicos, todos foram devidamente cumpridos. Os parâmetros do motor DC foram determinados por meio de ensaios laboratoriais, seguindo metodologia validada por autores da literatura, o que possibilitou a construção precisa do modelo matemático do sistema. Com todos os dados em mãos, foi possível montar o modelo linear em espaço de estado.

A análise dos autovalores da matriz  $A$  confirmou a instabilidade do sistema em malha aberta, destacando a necessidade do controle por realimentação de estados. A matriz de controlabilidade apresentou posto igual a 4, o que garante a controlabilidade total do sistema. A matriz de ganho ótimo  $K$  foi obtida com base nas matrizes de desempenho  $Q$  e  $R$ , e mostrou-se eficaz ao definir a ação de controle necessária para estabilizar o sistema no ponto de equilíbrio.

As simulações em diferentes condições iniciais evidenciaram o bom desempenho do controlador LQR projetado, demonstrando sua capacidade de resposta frente a diversas situações, mantendo a estabilidade e o controle do sistema. Assim, os resultados desejados foram atingidos conforme o proposto no início do trabalho.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a análise do desempenho do sistema em malha aberta e fechada, o ajuste fino das matrizes  $Q$  e  $R$ , e a investigação da robustez do sistema. Além disso, a realização de simulações mais complexas e testes experimentais práticos são essenciais para validar a eficácia do controlador diante de limitações reais de hardware e ambiente.

## REFERÊNCIAS

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Sistemas de controle moderno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

GOLNARAGHI, Farid; KUO, Benjamin C. **Sistemas de controle automático**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

MATHWORKS. **MATLAB/Simulink**: versão R2023a. Natick: The MathWorks Inc., 2023. Software computacional. Disponível em: <https://www.mathworks.com/>. Acesso em: 19 abr. 2025.

OGATA, Katsuhiko. **Engenharia de controle moderno**. 4. ed. Upper Saddle River, Nova Jersey: Prentice Hall, 2003.

OLIVEIRA, V. A.; AGUIAR, M. L.; VARGAS, J. B. **Sistemas de controle: aulas de laboratório**. 3. ed. São Carlos: EESC-USP, 2005.

SINGH, Jitendra. **A short notes on inverted pendulum: model based control design for swing-up & balance the inverted pendulum** – Energy based collocated partial feedback linearization control for swing up & LQR control for balance. [S.l.], [s.n.], [20--]. Trabalho acadêmico orientado por SHARMA, Shambhu N.; FULWANI, Deepak Kumar M.