INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAZONAS - IFAM
CAMPUS MANAUS - CENTRO
DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPERIOR
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SEVERINO FRANCISCO DA SILVA

A ANÁLISE DO ERRO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA BÁSICA

MANAUS – AM

2016

SEVERINO FRANCISCO DA SILVA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ensino Superior do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, como parte do requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor MSc SERVULO MORAIS OLIVEIRA.

Coorientadora: Professora Esp HELIAMARA PAIXÃO DE SOUZA

MANAUS - AM

2016

SEVERINO FRANCISCO DA SILVA

A ANÁLISE DO ERRO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DA MATEMÁTICA BÁSICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Banca Examinadora do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas, como parte do requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em _____ de _______________ de 2016.

BANCA EXAMINADORA

____
Professora MSc Andreia Pinto de Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas

____
Professora Esp Heliamara Paixão de Souza.
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas

____
Professor MSc José Ribamar Silva de Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas

Agradecimentos

A ***Deus,*** *por ter me ofertado as forças, a sabedoria e as oportunidades necessárias para que fosse possível alcançar mais um objetivo ímpar em minha vida;*

Aos meus pais, in memoria, ***Francisco*** *e* ***Rita****, por terem proporcionado o meu acesso aos ensinamentos básicos, pois ao driblarem as dificuldades peculiares à sua classe social e as mazelas impostas pela periferia urbana, deram-me as condições básicas para que eu pudesse trilhar por novos conhecimentos;*

A minha família, ***esposa*** *e* ***filhos****, por terem dado apoio incondicional e por estarem sempre incentivando e orientando meus passos nos momentos inglórios provocados pela fadiga;*

Aos meus ***professores*** *e aos* ***orientadores*** *de estágios, razões pelas quais, sem esses personagens não poderia ter atingido tão glorioso feito; e por fim,*

Aos meus atuais netos, ***Breno Arruda*** *e* ***Barbara Bruna*** *pelo privilégio de suas existências em minha vida e por acreditar que, a adição de mais uma das áreas do conhecimento – a matemática, ao leque já conquistado, poderá no futuro lhes mostrar o quanto a constante busca ao conhecimento pode ser importante para as realizações pessoais e assim, indiretamente poder encorajá-los em seus grandes passos, pois saibam desde já que:*

Certamente serão árduas vossas caminhadas, tropeços irão ocorrer, palavras de desânimo irão vos assediar, mas na vida, as conquistas pertencem somente aos fortes e perseverantes, sendo reservado aos fracos e indecisos, o eterno sabor das incertezas;

Para aprenderem a nobre matemática, é necessário minimizar o trabalho de suas sinapses, evitando situações de estres. Sejam humildes, reconheçam que o esforço deve ser constante, recuem sempre aos conceitos não apreendidos, não se isolem, perguntem, estudem em parceria, tentem ensinar o que vocês acharem que aprenderam isso irá lhes dar mais confiança. Tenham plena certeza de que, sendo a questão sobre matemática, então certamente haverá solução.

Severino, o infante.

Epígrafe

“É necessário revermos nossos conhecimentos com motivação, pois no processo seletivo que a vida nos impõe, nada sabemos daquilo que achávamos que sabíamos. ”

O infante

Resumo

A análise do erro como ferramenta didática de aprendizagem encontrou eco nas práticas docentes fundamentadas nas teorias da psicologia experimental e nos pressupostos construtivistas. Apreender os conceitos matemáticos necessários à resolução dos problemas do cotidiano sem que houvesse a possibilidade de cometer **erros** sistemáticos nos parece ter sido ao longo dos tempos um grande desafio para a maioria dos estudantes, sendo muitas vezes elemento precursor da evasão escolar. Porém, analisar a qualidade desses **erros** com o objetivo de evitar a sua sistematização, parece-nos não ter sido uma tarefa fácil para os educadores licenciados em matemática, pois têm apresentado enfoques variados, dependendo dos objetivos com que professores e pesquisadores se debruçam sobre esse tema. Sem a pretensão de finalizarmos o debate sobre o tema, nos propusemos a investigar a possibilidade de se utilizar a análise do erro como ferramenta de aprendizagem e, para atingirmos nosso objetivo, o nosso trabalho foi dividido em quatro capítulos: No **capítulo I** procuramos **compreender** até que ponto o futuro professor de matemática pode utilizar o erro como ferramenta didática de aprendizagem, fazendo uma reflexão sobre o erro no atual modelo de avaliação mediante prova; No **capítulo II**, buscamos **identificar** nas pesquisas bibliográficas, o que dizem os teóricos sobre a presença do erro como parte integrante do processo dialético e se pode ser entendido como peça fundamental para que haja mudanças de estratégias e de metodologias facilitadoras no *estimulo* dos alunos a *persistirem* em suas descobertas e **verificar** nas conclusões concebidas por pesquisadores sobre a mesma temática a possibilidade de se ratificar as conclusões obtidas; **No capítulo III**, nos propusemos a apresentar os embasamentos teóricos sobre Proporções, Probabilidades, Combinações e Razões fracionárias como forma de subsidiar os procedimentos do cálculo; **No quarto e último capítulo**, apresentamos os procedimentos metodológicos das ações a serem desenvolvidas para conclusão deste trabalho – análise dos procedimentos aplicados pelo aluno na resolução das questões matemáticas em avaliações do tipo prova, independentemente do resultado obtido – retomada de conceitos com a utilização de aulas expositivas e com a utilização de trabalhos coletivos. Finalizando com as nossas **considerações finais**.

Palavras Chave: Análise do erro não construtivo, construtivo e sistemático; Licenciatura matemática; Ferramenta didática de aprendizagem; Sistematização do erro; Avaliação diagnóstica, somativa e formativa; Racionais; Probabilidades; Proporções; Combinações

Abstrat

The analysis of error as a didactic learning tool found echo in the teaching practices based on theories of experimental psychology and constructivist assumptions. To apprehend the mathematical concepts necessary to solve daily problems without the possibility of systematic errors seems to us to have been a great challenge for the majority of the students, being often a precursor of school dropout. However, analyzing the quality of these errors in order to avoid systematizing them seems to have not been an easy task for educators with a degree in mathematics, since they have presented different approaches, depending on the objectives with which teachers and researchers focus on this theme. Without intending to finalize the debate on the subject, we set out to investigate the possibility of using error analysis as a learning tool and, to achieve our goal, our work was divided into four chapters: In chapter I we try to understand until What point the future mathematics teacher can use the error as a didactic learning tool, making a reflection on the error in the current evaluation model by means of proof; In Chapter II, we sought to identify in bibliographical research what theorists say about the presence of error as an integral part of the dialectical process and whether it can be understood as a fundamental element for the change of strategies and facilitating methodologies in stimulating students to persist In their findings and verify in the conclusions conceived by researchers on the same subject the possibility of ratifying the conclusions obtained; In Chapter III, we propose to present the theoretical bases on Proportions, Probabilities, Combinations and fractional Reasons as a way of subsidizing the calculation procedures; In the fourth and last chapter, we present the methodological procedures of the actions to be developed to conclude this work - analysis of the procedures applied by the student in the resolution of mathematical questions in assessments of the type test, regardless of the result obtained - retaking concepts with the use of classes Expositions and the use of collective works. Finishing with our final considerations.

Keywords: Error analysis that is not constructive, constructive and systematic; Mathematics degree; Learning didactic tool; Systematization of the error; Diagnostic, summative and formative evaluation; Racionais; Probabilities; Proportions; Combinations

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Quando nos propusemos a considerar o erro como ferramenta didática de aprendizagem no processo avaliativo do aluno por parte do professor de matemática, nos deparamos com uma incógnita de difícil resolução: romper com os paradigmas tradicionais adquiridos por esses educadores que os impulsionam a não considerarem o erro no processo de avaliação da aprendizagem. Então, o que fazer? Espaços físicos, infraestruturas, instrumentos e materiais pedagógicos adequados, além dos atuais meios tecnológicos disponíveis, parecem não ser suficientes para a obtenção do sucesso desejado no processo de ensino-aprendizagem.

Nas incansáveis horas de estágio em instituições de ensino com relativo rigor nas avaliações, observamos ser comum a aprovação do aluno que atinge 60% de acertos. Ora, se considerarmos o ano letivo composto somente por quatro avaliações onde um discente tenha obtido, respectivamente, notas 7, 6, 5 e 6 nessas avaliações, concluiríamos que esse “aluno gênio” apreendeu, em média, somente 60% dos conceitos que lhes foram ofertados. Mas, mesmo com um déficit significativo de 40% fora considerado aprovado pelos atores principais e coadjuvantes dessas instituições**. Mas,** entendemos que a aprovação fundamentada na aquisição de conhecimentos parciais pode acarretar o acúmulo de um significativo déficit de conceitos prévios necessários à construção de novos conceitos.

Transformar as práticas culturais, tradicionais e burocráticas das escolas não é tarefa simples, basta citarmos a evasão escolar, embora sabendo que a evasão escolar é um desafio tanto para as escolas, quanto para os pais e para o sistema educacional como um todo, ainda não se foi possível estagná-la por “desconhecimento” dos motivos que a faz se tornar presente como se erva daninha fosse.

Como ponto de partida para se minimizar esse caos, acreditamos ser necessário intervir na formação acadêmica dos futuros professores de matemática, considerados como um dos atores principais do processo de ensino-aprendizagem, para que possamos em curto prazo, atribuirmos valores positivos a essa incógnita, tornando como rotina nas atividades desses futuros profissionais, a contínua análise do erro, por acreditarmos que a análise do erro como ferramenta didática da aprendizagem poderia contribuir para o sucesso na educação básica brasileira.

Essa também é uma das pretensões do nosso trabalho: sensibilizar os graduandos das licenciaturas em matemática, no sentido de que, em suas práticas docentes após formados, seja possível resgatar o conhecimento não apreendido pelo aluno, a partir da análise do erro cometido pelo aluno.

Para tanto, dividimos o desenvolvimento do nosso trabalho em quatro capítulos: No **capítulo I** procuramos **compreender** até que ponto o futuro professor de matemática pode utilizar o erro como ferramenta didática de aprendizagem, fazendo uma reflexão sobre o erro no atual modelo de avaliação mediante prova; No **capítulo II**, buscamos **identificar** nas pesquisas bibliográficas, o que dizem os teóricos sobre a presença do erro como parte integrante do processo dialético e se pode ser entendido como peça fundamental para que haja mudanças de estratégias e de metodologias facilitadoras no *estimulo* dos alunos a *persistirem* em suas descobertas e **verificar** nas conclusões concebidas por pesquisadores sobre a mesma temática a possibilidade de se ratificar as conclusões obtidas; **No capítulo III**, nos propusemos a apresentar os embasamentos teóricos sobre Proporções, Probabilidades, Combinações e Razões fracionárias como forma de subsidiar os procedimentos do cálculo; **No quarto e último capítulo**, apresentamos os procedimentos metodológicos das ações a serem desenvolvidas para conclusão deste trabalho – análise dos procedimentos aplicados pelo aluno na resolução das questões matemáticas em avaliações do tipo prova, independentemente do resultado obtido – retomada de conceitos com a utilização de aulas expositivas e com a utilização de trabalhos coletivos. Finalizando com as **considerações finais**. Com isso visamos disponibilizar esta produção à comunidade acadêmica para que graduandos das diversas licenciaturas passem a utilizar o erro como ferramenta didática de aprendizagem e não como uma certidão definitiva de óbito atribuída à parcela do conhecimento não apreendido.

Para a formulação do problema, partimos do pressuposto de que na prática docente, o processo de avaliação através da tradicional prova objetiva aplicada no final de um processo, apenas mensura o acerto em detrimento do erro. Segundo Macedo (2007), esse modelo avaliativo se propõe a verificar o que foi aprendido pelo educando durante o processo e tem como finalidade única, aprovar, reprovar ou manter determinadas condições de aprendizado já conquistada, sendo mais grave a possibilidade dessa ferramenta avaliativa ser utilizada para fazer comparações de mérito, justificar índices de desempenho institucional, redefinir critérios no processo de avaliação, antecipar soluções a problemas ainda não vivenciados como se os grupos discentes fossem constantemente homogêneos em suas composições.

Portanto, consideramos que o foco da problematização, embasado pelo processo da formação de conceitos na teoria dos campos conceituais, de Vergnaud (apud Lima, 2000), pode estar no fato de que o aluno desconhece os conceitos prévios necessários ao desenvolvimento da questão, o que nos induz a seguinte hipótese:

A análise da(s) causa(s) do(s) erro(s) e a devida (re) apresentação dos conceitos prévios não apreendidos, habilitaria o aluno à formulação de novos conceitos?

Nossa justificativa para indução dessa hipótese se respalda no fato de que, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, a aplicação de avaliações do tipo prova ao final de cada etapa da "aprendizagem", sem a devida preocupação do corpo docente em analisar os erros cometidos pelos alunos, tornam-se extremamente nocivas quando se tratam, por exemplo, do aprendizado de conceitos matemáticos elementares, visto que a somatória dos conceitos não apreendidos pelo aluno nessa fase dará, sem dúvidas, início a construção de lacunas que tendem a se ampliar nas séries subsequentes, dificultando a formação de novos conceitos, pois na fase posterior, novamente o erro passará sempre a ser ignorado pelo professor, por não analisar as razões de sua existência e pelo aluno que, por não saber o que questionar, o aceita de forma benevolente.

Entendemos que nosso trabalho possa ser extremamente relevante para a instituição e para a sociedade, por proporcionar o resgate dos conhecimentos matemáticos não apreendidos pelo aluno nas séries iniciais de sua formação, com a finalidade de subsidiar na formação dos conceitos posteriores nessa área do conhecimento, em decorrência do vasto campo conceitual a eles relacionados, dada a sua iminente participação na formação de conceitos nos tópicos matemáticos subsequentes, ação essa que poderá minimizar, dentre outras:

- ✓ O custo adicional com a realocação do indivíduo no sistema educacional;
- ✓ A concentração de uma grande massa desqualificada na pirâmide social;
- ✓ Os baixos índices da qualidade de ensino;
- ✓ A conceituação negativa da instituição pelo corpo discente;

Como objetivo geral, nos propusemos a **r**esgatar o conhecimento não apreendido pelo aluno a partir do seu próprio erro, **compreendendo** até que ponto o professor de matemática pode utilizar o erro como ferramenta didática de aprendizagem? **Identificando** nas pesquisas bibliográficas o que dizem os teóricos sobre a presença do erro como parte integrante do processo dialético e se pode ser entendido como peça fundamental para que haja mudanças de estratégias e de metodologias facilitadoras no *estimulo* dos alunos a *persistirem* em suas descobertas? **Verificando** nas conclusões concebidas por pesquisadores sobre a mesma temática a possibilidade de se ratificar as conclusões obtidas. Além de podermos **analisar** as causas implícitas e explicitas que culminaram com o insucesso na resolução de problemas matemáticos no ensino básico e o tratamento dispensado ao erro por ocasião da correção da prova, através de pesquisas documental, para que seja possível:

- ✓ Identificar nos procedimentos de avaliação, os erros mais recorrentes;
- ✓ Resgatar a autoestima do aluno e a satisfação pela busca de desafios;
- ✓ Diminuir a reprovação do aluno e a consequente evasão escolar;
- ✓ Auxiliar na formação de educadores matemáticos proativos e sintonizados com a realidade socioeconômica do aluno;
- ✓ Socializar a utilização do erro como ferramenta de aprendizagem nas Licenciaturas em Matemática;
- ✓ Elevar o índice da qualidade do ensino e, consequentemente, resgatar o crédito dos corpos docente e discente e da instituição junto à sociedade.

Capítulo I

REFLEXÃO SOBRE O ERRO NA AVALIAÇÃO SOMATIVA[(1)]

A prática pedagógica vigente, independente do plano de aula adotado, reforça a reprodução do modelo excludente que a escola exerce sobre o corpo discente quando adota a avaliação de conteúdos através de provas, mecanismo esse que por si só já apresenta ação coercitiva, por visar apenas à mensuração do "acerto" para fins classificatórios, em detrimento do "erro". Exemplificando, transcrevemos a seguir a resolução de uma questão proposta numa prova realizada pelo aluno CAIO, do 2º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, na cidade de Manaus, sobre a temática: Probabilidade.

A questão: Uma urna contém 3 bolas amarelas, 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. Retirando uma ao acaso, qual a probabilidade ou a chance de a bola retirada ser amarela?

A resolução apresentada pelo aluno CAIO: 1/12.

A avaliação dada à questão: ERRADO.

A resposta certa: 3/12 ou ¼ ou 0,25 ou 25%.

A nossa análise do erro: O aluno CAIO, no mínimo, compreendeu o conceito de universo (espaço amostral) e, além disso, entende que probabilidade é sempre uma razão (fração) entre o que se quer para o que se tem, mas não compreendeu o conceito de uma sub amostra desse espaço, porque não entendeu que dispunha de 3 bolas amarelas (subespaço) em um universo de 12 bolas. Percebemos ainda que, mesmo que tivesse atendido o referencial resolutivo imposto pela questão, o aluno CAIO não seria capaz de relacionar a sua razão fracionária com as razões decimal ou fracionária.

Concomitante a essa prática, adiciona-se ao conjunto dos elementos precursores do erro, a ineficácia da ação pedagógica quanto à supervisão do modelo de avaliação adotado, culminando com a aplicação de avaliações formais, com rituais bem rígidos, sem as devidas análises de seus pressupostos básicos. Pois, após a análise do resultado da avaliação supracitada, o professor dessa série, em parceria com a equipe pedagógica, deveria identificar e promover a (re) apresentação dos elementos precursores do erro, tais como os conceitos de espaço e subespaço relativos a uma amostra, concomitante

---

[(1)] Segundo Bloom (1975), a **avaliação somativa** tende a mensurar apenas os resultados positivos, ignorando os erros cometidos pelo aluno.

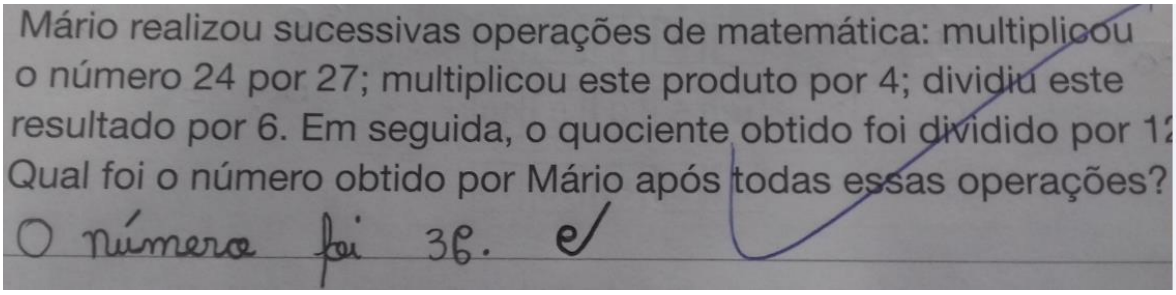
aos conceitos de números fracionários e sua relação com os decimais e a porcentagem.

Não o fazer significaria condenar o aluno CAIO a adicionar mais um componente negativo ao seu cabedal de conceitos não apreendidos. Ou será que pelo fato do aluno CAIO ter obtido nessa avaliação nota 8, a equipe pedagógica deva se dar por satisfeita? Afinal o aluno CAIO ficou acima da média. É preciso que nós educadores reflitamos sobre essa questão.

> "M*udar a avaliação significa, provavelmente, mudar a escola*" (PERRENOUD, 1993, p.173).

Devemos ainda, atentar para o fato de que nem sempre a resolução correta deva ser considerada sem que se faça uma análise sobre os procedimentos desenvolvidos pelo aluno na sua obtenção, pois excessos de cálculos podem induzir o educando aos *erros não-construtivos*[2], quando, por exemplo, o aluno efetua multiplicações desnecessárias.

Vejamos a resolução do problema a seguir, desenvolvida pela aluna KLM, do 5º ano do Ensino Fundamental, em dois momentos distintos:

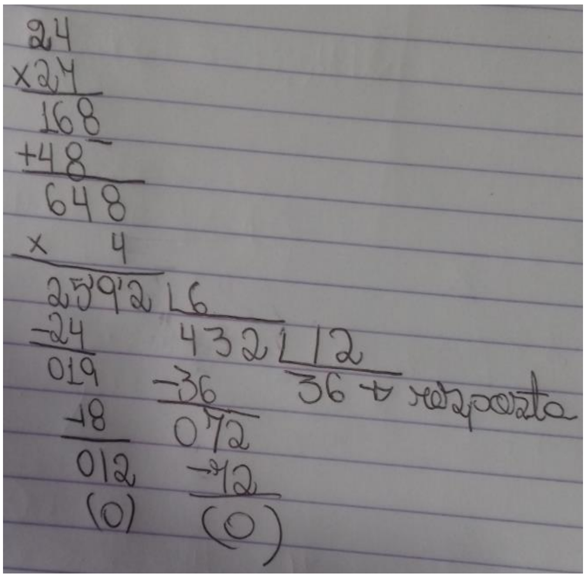

Mário realizou sucessivas operações de matemática: multiplicou o número 24 por 27; multiplicou este produto por 4; dividiu este resultado por 6. Em seguida, o quociente obtido foi dividido por 1
Qual foi o número obtido por Mário após todas essas operações?
O número foi 36.

(ÊNIO, 2015)

---

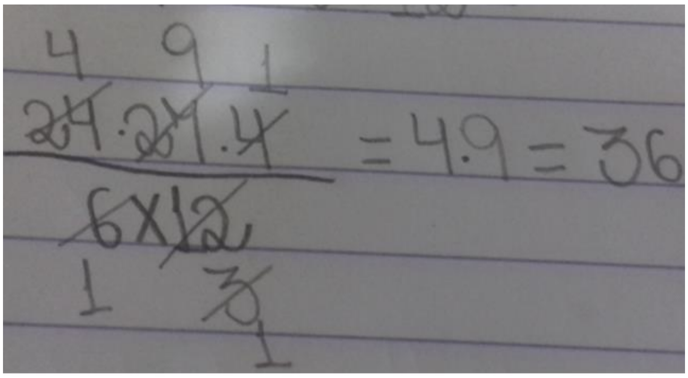
[2] Segundo Davis e Espósito (1990), *erros não-construtivos* são erros que não se referem à construção do conhecimento, mas simplesmente ao emprego ou aprimoramento dos conhecimentos já construídos, são erros de sistematização do código escrito, de distração, de falta de treino ou repetição, entre outros.

Resolução 1:



A resolução 1 apresenta excessos de operações multiplicativas que poderiam ter culminado em *erros não-construtivos* face a magnitude dos produtos obtidos.

Resolução 2:



Na resolução 2, a aluna KLM minimizou as operações multiplicativas ao máximo, utilizando-se dos critérios de divisibilidade na simplificação dos fatores envolvidos na operação fracionária, tendo conseguido atingir a resposta com poucos cálculos. Mas, isso somente foi possível após a reapresentação dos conceitos prévios sobre divisibilidade e simplificação fracionária, além dos procedimentos necessários a essa conduta, pois KLM não havia sido orientada nesse sentido e certamente iria perpetuar tal modelo resolutivo nas séries subsequentes.

> A análise do erro permite-nos valorizar o processo mental subjacente às respostas dadas e não apenas a resposta como um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelo aluno nos leva a verificar que há algo de positivo nele mesmo quando erra. (ROSSO, 1996)

Complementando o pensamento de Rosso (1996)**,** poderíamos ainda pensar que a análise dos processos utilizados pelo aluno na resolução de questões matemáticas nos levaria a verificar que sempre há algo a ser "melhorado", tanto no erro quanto no acerto.

Não poderíamos ignorar, por exemplo, os procedimentos tomados por um aluno do 2º ano do Ensino Médio na adição de uma série de números naturais consecutivos de 1 a 100, como sendo: 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100, mesmo que a resposta final tenha sido 5050. No modelo da avaliação somativa, onde apenas o acerto interessa, esse déficit de aprendizagem sobre a soma dos termos de uma progressão aritmética passaria desapercebido do avaliador por não ter se dado ao trabalho de analisar os procedimentos utilizados pelo aluno para a obtenção da resposta.

A saber, o procedimento correto seria: $\frac{(1+100)100}{2} \rightarrow 101x50 = 5050$.

Capítulo II

A TEORIZAÇÃO DO ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Segundo Ferreira (2008), a parceria da escola (corpo docente) com o aluno deve ser enfatizada no momento em que as dificuldades se apresentam, buscando mecanismos pedagógicos para, entre outras situações, corrigir e lidar com o erro. Acrescenta ainda que, o fundamental seria que o corpo docente mudasse a sua postura, passando a transformar o erro e as dificuldades dos alunos em situações de aprendizagem para que, tanto a escola quanto os alunos, pudessem acertar juntos e alcançarem os objetivos propostos para um determinado período letivo.

Luckesi (1998), Bloom (1975, p.22) e Demo (2004, p.52) são alguns dos autores que ratificam o pensamento de Ferreira (2008) quando afirmam que tratar o erro como elemento negativo na avaliação, marginaliza os alunos no processo de ensino-aprendizagem, podendo causar transtornos sociais e psicológicos irreversíveis, além de afetar diretamente a sua autoestima.

> A partir do erro na prática escolar, desenvolve-se e reforça-se no educando uma compreensão culposa da vida, pois, além de heterocastigado, muitas vezes ele sofre ainda a autopunição. Ao ser reiteradamente lembrado da culpa, o educando não apenas sofre os castigos impostos de fora, mas também aprende mecanismos de autopunição, por supostos erros que atribui a si mesmo. Nem sempre a escola é a responsável por todo o processo culposo que cada um de nós carrega, mas ela reforça (e muito) esse processo. Quando um jovem não vai bem numa aprendizagem e diz: "Poxa, isso só acontece comigo!", que é que está expressando senão um juízo culposo e autopunitivo? (LUCKESI, 1998)

> El resultado de este método de distribución de los individuos en categorías intenta convencer a algunos de que son capaces, buenos y deseables desde el punto de vista del sistema, y a otros de que son deficientes, males e indeseables. Es improvable que este continuo etiquetamiento tenga consecuencias beneficiosas para el desarrollo educacional del individuo, y em cambio es probable que tenga consecuencias desfavorables en la autoestinación de muchos estudiantes.
>
> (…) Tal como se emplean comúnmente en las escuelas, las pruevas y otras formas de evaluación contribuyen en escassa medida al mejorameiento de la enseñansa y el aprendizaje y raras veces serven para assegurar a todos (o casi todos) aprenden lo que el sistema escolar considera como tareas y metas importantes del proceso educativo. (BLOOM, 1975, p.22)

Bloom (1975), objetivando minimizar os efeitos negativos proporcionados pela avaliação mediante prova, defende a utilização de uma avaliação formativa (o ensino e a aprendizagem estão destinados a preparar o estudante para uma determinada área do conhecimento) em detrimento da avaliação somativa (mensuração apenas de resultados).

A primeira, além de ser útil para a elaboração dos currículos, serve também para a instrução e a aprendizagem, porque ajuda o estudante no seu processo de aprendizagem e o professor na continuidade da reorganização de seus planos de aulas, promovendo mecanismos mais individualizados de ensino, respeitando o ritmo e a forma mais apropriada de apresentar o conhecimento aos sujeitos.

A avaliação formativa serve também, segundo o autor, de "retroalimentação aos docentes". O autor sugere que, ao final das etapas de aprendizagens, os professores preparem uma análise dos erros dos estudantes para obter uma ideia concreta sobre as dificuldades mais frequentes, analisando se os erros são de apenas um pequeno grupo de estudantes ou se referem a toda a classe. Reforça, dessa maneira, o propósito da avaliação formativa funcionar como controle da qualidade do ensino.

Demo (2004, p.52) afirma que a correção das avaliações geralmente é quantitativa, ou seja, o professor avalia o número de acertos que o educando obteve, atribuindo-lhe uma nota. Ignorando que o erro cometido pelo aluno consistiria em uma fonte rica de informações para a compreensão de uma determinada situação de aprendizagem, pois sendo um fenômeno inerente à aprendizagem, revelaria uma concepção de aprendizagem associada a uma dada representação que o aluno formulou.

Morin (2007), dissertando sobre "Os Sete Saberes Necessários à Educação do Futuro", adverte os educadores para a fragilidade do conhecimento quando esse é repassado de forma fragmentada.

> (...) não ensinamos as condições de um conhecimento pertinente, isto é, de um conhecimento que não mutila o seu objeto. Por que? Porque nós seguimos em primeiro lugar, um mundo formado pelo ensino disciplinar e é evidente que as disciplinas de toda ordem que ajudaram o avanço do conhecimento são insubstituíveis, o que existe entre as disciplinas é invisível e as conexões entre elas também são invisíveis, isto não significa que seja necessário conhecer somente uma parte da realidade, é preciso ter uma visão que possa situar o conjunto. É necessário dizer que não é a quantidade de informações, nem a sofisticação em Matemática que podem dar sozinhas um conhecimento pertinente, é mais a capacidade de colocar o conhecimento no contexto.

> (...) o ensino por disciplina, fragmentado e dividido, impede a capacidade natural que o espírito tem de contextualizar, é essa capacidade que deve ser estimulada e deve ser desenvolvida pelo ensino de ligar as partes ao todo e o todo às partes. Pascal dizia, já no século XVII, e que ainda é válido: "Não se pode conhecer as partes sem conhecer o todo, nem conhecer o todo sem conhecer as partes". (MORIN, 2007)

Complementando a afirmação de Morin (2007), acrescentaríamos que essa fragmentação nociva ao aprendizado ocorre não somente entre as disciplinas mas, também entre os subconjuntos que as compõem, como é o caso da dicotomia existente entre os racionais aritméticos em matemática: os alunos "aprendem" os conceitos sobre frações, decimais e porcentagens mas, em sua maioria, não são capazes de perceberem suas correlações na resolução de problemas matemáticos que as envolvem.

Segundo Perrenoud (apud Estebam, 2001), a avaliação formal conhecida como prova foi inserida no processo de criação de um sistema centralizado de ensino, como parte da racionalização dos processos sociais, consolidando-se como medida educacional padrão e como termo de comparação, diferenciação, classificação e, principalmente, exclusão. Intervir na recuperação do erro através de ações que reduzam os efeitos nocivos que esse ato pode provocar é dever da escola enquanto parceira do aluno.

Ignorar essa parceria é ratificar o pensamento de Ribeiro (1996, apud Benincá, 2002) quando afirma que o monopólio do saber escolástico, sendo exercido de forma opressiva perpetua a ignorância de um povo que, excluído da escola, assume um estado de conformismo irredutível por saber que nada sabe, assim como sabe que sendo pobre, pobre deve continuar. Ratificando tais pensamentos, Sobierajski (1992, apud Freitas, 1995, p.214), em sua pesquisa sobre as práticas avaliativas, afirma que o atual modelo de avaliação, na sala de aula, é utilizado para classificar, controlar e disciplinar, visando mera atribuição de nota. Os resultados obtidos pelos alunos não conduzem à articulação pelos professores de um trabalho destinado a lidar com as dificuldades apresentadas, mas apenas como elemento seletivo.

Giroux, 1986 e Dias da Silva, 1992 (apud André, 1995), utilizando-se do referencial da teoria da resistência na análise das situações do cotidiano escolar, direcionam suas conclusões para a possível existência de um elemento curioso no conjunto dos precursores do erro, segundo esses autores, seria uma forma de indignação do aluno para com o modelo pedagógico vigente, situação essa que poderia ser melhor detectada através da pesquisa etnográfica, quando então o educador saberia colher do aluno, através do olhar e do ouvir, os verdadeiros elementos que culminaram com o erro.

> A primeira coisa que devemos examinar é a própria noção de que erro é inequivocamente um indício de fracasso. A segunda questão intrigante é que, curiosamente, o fracasso é sempre o fracasso do aluno. O que gostaria de demonstrar é que a constatação de um erro não nos indica, de imediato, que não houve aprendizagem, tampouco nos sugere inequivocamente fracasso, seja da aprendizagem, seja do ensino. (AQUINO, 1997, P.12) s

> Diante de uma situação-problema a criança deve adotar uma estratégia para resolvê-la. Esta estratégia envolve, por sua vez, dois aspectos centrais: uma ideia a respeito do objetivo a ser alcançado e uma noção acerca dos meios para atingi-lo. A resolução da tarefa envolve assim, de um lado, a compreensão do problema, e do outro, procedimentos para resolvê-lo. O nível estrutural fixa os limites dentro dos quais a criança pode assimilar a situação-problema e oferece a gama de procedimentos possíveis de serem empregados para resolvê-la. Acontece que dentro deste conjunto de "possíveis", determinado pelo nível estrutural, cabe à criança escolher alguns, que em seu entender, melhor resolvem a tarefa. Se a criança acerta, ou seja, se obtém êxito, cabe ao professor colocar-lhe novas situações-problema que provoquem desequilíbrios em sua forma de pensar, para levá-la a construir novos patamares cognitivos. (DAVIS e ESPÓSITO, 1991, s/p)

A reorganização das estruturas cognitivas citada por DAVIS e ESPÓSITO (1990) parece encontrar suporte, salvo melhor interpretação, na Teoria dos Conceitos Prévios de G. Vergnaud que, segundo Lima, Araújo, Albuquerque (2000), ao se referirem a essa teoria, fornecem embasamentos para que se possa afirmar que um novo conceito somente se forma a partir de outros conceitos prévios e exemplifica: apreender o conceito sobre probabilidade necessitaria antes dispor dos conceitos sobre espaço, subespaço, frações, decimais e porcentagens, não necessariamente nesta ordem mas, correlacionados entre si.

Ainda segundo Davis e Espósito (1990), os erros cometidos pelos alunos podem ser classificados em três grupos:

Erros não-construtivos - erros que não se referem à construção do conhecimento, mas simplesmente ao emprego ou aprimoramento dos conhecimentos já construídos, são erros de sistematização do código escrito, de distração, de falta de treino ou repetição, entre outros;

Erros construtivos - neste caso a situação problema não foi resolvida de modo adequado em razão do aluno não dispor ainda, de todos os esquemas de ação requeridos para tal, visto que existem lacunas em sua estrutura de pensamento que dificultam a assimilação dos dados disponíveis. Assim, sem um entendimento claro do que lhe cabe realizar e, portanto, sem elementos necessários para optar por um determinado curso de ação, só resta ao aluno proceder por tentativa e erro, fazendo correções em suas estratégias, em função dos êxitos ou fracassos da ação efetivamente realizada;

Erros sistemáticos – o aluno errou porque não possui a estrutura de pensamento necessária à solução da tarefa, de onde decorre uma impossibilidade de compreender o que lhe é solicitado, pois sem o entendimento da tarefa não há como selecionar procedimentos de ação adequados à realização da mesma.

Diante dessas afirmações é possível compreender como ocorre o processo que o aluno desenvolve durante a resolução de tarefas na sala de aula, desde exercícios de fixação até os cobrados em provas e trabalhos. Mas quando esse aluno erra o professor também deve estar atento ao significado desse erro e procurar maneiras de ajudar o aluno a superá-lo. Percebemos que a origem do erro é muito importante para que o professor possa avaliá-lo e agir perante a dificuldade do aluno.

Os erros não construtivos levam o professor a entender que o aluno está estudando pouco ou não está conseguindo se concentrar. Cabe então ao professor atribuir tarefas que estimulem o aluno a estudar mais, como por exemplo, aplicando exercícios de fixação e estimulando a concentração através de questionamentos sobre determinado tópico, condição essa necessária à obtenção do raciocínio adequado, pois, sabendo explicar os por quês teremos convicção de que o aluno aprendeu.

Os erros construtivos acontecem quando o aluno assimila um conhecimento em um esquema “impróprio” (Abrahão, 2001 p. 32). Na matemática, esse tipo de erro é mais comum nas situações problemas, onde muitas vezes as respostas não coincidem com o que o professor espera que o aluno responda. Portanto é dever do professor utilizar a resposta do aluno para ajudá-lo, a partir dela, a construir outras hipóteses mais adequadas à situação, chegando assim a resposta correta. Também é válida aqui a orientação anterior: sabendo explicar os por quês teremos convicção de que o aluno aprendeu.

Os erros sistemáticos estão diretamente relacionados aos déficits de aprendizagem, ou seja, aos conhecimentos não apreendidos. Nesse caso, cabe ao professor elencar esses conhecimentos através de uma retomada dos conhecimentos prévios necessária a elucidação do conceito ou do problema apresentado.

O erro nos dá coordenadas de trabalho. Partir e chegar, fundamentando o caminho, sustentando o sentido (valor), tendo metas (representações) e propondo ações (procedimentos) tornam a travessia do caminho interessante ou não.

Nogaro e Granella (2004), dissertando sobre o tema: O Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem, concluíram que o modelo de avaliação precisa ser pensado, planejado e realizado de forma integrada à aprendizagem. Devendo acompanhar esse processo de modo contínuo, tanto nos momentos de sucesso como naqueles em que não conseguimos aprender, assumindo o erro como oportunidade de crescer e aprender (e não como oportunidade de castigo, ou indicação de menor capacidade do aprendiz). Esse acompanhamento assume a característica de um *feedback*, de uma retroalimentação, que vem do professor, dos colegas, do próprio aprendiz e de outros elementos que possam estar participando do processo e que cumpre um papel de ajudar o aluno a aprender, bem como motivá-lo a aprender cada vez mais. Por isso mesmo, supera-se o clima de tensão e medo em favor de um ambiente de procura e problematização para crescer.

Viali e Cury (2016), dissertando sobre o tema: O Papel do Erro na Aprendizagem de Matemática concluiu que o erro do aluno é um saber que ele possui, construído de alguma forma, sendo necessária a elaboração de intervenções didáticas que desestabilizem suas certezas, levando-o a um questionamento sobre as suas respostas. Nessa ótica a autora entende que a análise de erros também pode ser vista como metodologia de ensino se forem elaboradas atividades de sala de aula em que os erros dos alunos sejam explorados e aproveitados como ferramentas para a aprendizagem.

Macedo (2007) dissertando sobre o tema: Avaliação do Erro: Ponto de Partida ou de Chegada? Decompõe a avaliação em três situações distintas: No início, durante e no final do processo de ensino aprendizagem, segundo esse autor:

A avaliação do erro cometido no ponto de partida fora denominada de *avaliação diagnóstica*, e sugere que nessa fase, o professor deva verificar quais são os erros, as dificuldades, insuficiência de informações, recursos ou instruções apresentadas pelo aluno na fase inicial do processo pedagógico e como transformar esses erros em uma situação problema que possa nortear o trabalho pedagógico do docente;

A avaliação do erro durante o processo fora considerada como sendo uma avaliação *formativa*. Segundo o autor, esse modelo avaliativo poderia ajudar o aluno a aprender a se desenvolver, pois nele ocorreria a regulação de suas aprendizagens, o desenvolvimento de suas competências e o aprimoramento de suas habilidades em favor de um projeto. Embora esteja a serviço da aprendizagem, fica evidente que essa forma avaliativa caracteriza, pois, a intenção dominante do avaliador;

A avaliação do erro no ponto de chegada, caracteriza–se como sendo uma avaliação *somativa* e se identifica por meios dos recursos empregados, pela adoção de provas, seminários, etc. Segundo o autor, esse modelo avaliativo se propõe a verificar o que foi aprendido pelo educando durante o processo e tem como finalidade única, aprovar, reprovar ou manter determinadas condições de aprendizado já conquistada, sendo mais grave a possibilidade dessa ferramenta avaliativa ser utilizada para fazer comparações de mérito, justificar índices de desempenho Institucional, redefinir critérios no processo de avaliação, antecipar soluções a problemas ainda não vivenciados como se os grupos discentes fossem constantemente homogêneos em suas composições.

Tomando como referencial teórico as Teorias Piagetianas, Macedo afirma que o erro pode ter um valor construtivo na prática docente, podendo funcionar como um valioso recurso de aprendizagem e de ensino, para isso, sugere que o educador concentre suas ações no que Piaget chamou de "Zona de Assimilação", ou seja, delimitação de uma região onde algo está localizado ou pode acontecer e que, o sucesso depende da compreensão (Assimilação) do educando em conformidade com o seu nível de desenvolvimento e os recursos de aprendizagens a ele ofertado.

Em suas conclusões, Macedo alerta para o fato de que, nós educadores, em vez de justificarmos o erro após a sua ocorrência, deveríamos compreender as suas razões, procurando aperfeiçoarmos ou melhorarmos os procedimentos para obtenção de resultados positivos através da análise criteriosa do erro e da reorganização e readaptação constante do nosso planejamento de ensino para que fosse possível atender às necessidades de um determinado grupo.

Embasado nas alegações apresentadas por esses renomados autores, pretendemos neste trabalho resgatar o conhecimento não apreendido pelo aluno a partir da análise do seu próprio erro, passando assim a utilizar esse erro como ferramenta de aprendizagem, além de poder considerá-lo como elemento chave na reorganização do planejamento de ensino, e não como uma certidão definitiva de óbito atribuída à parcela do conhecimento não aprendido.

Capítulo III

O RESGATE DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS

1. Os Campos Conceituais

Para Vergnaud (apud Lima, Araújo, Albuquerque, 2000) e Moreira (1999), o conhecimento está organizado em campos conceituais, cujo domínio por parte do aprendiz vai acontecendo ao longo de um extenso período de tempo, por meio da experiência, maturidade e aprendizagem. Esses campos conceituais são recortes do mundo físico com um forte componente cultural associado.

Definição de Vergnaud sobre campo conceitual:

> (...) campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição do conhecimento (VERGNAUD, 1998).

Lima, Araújo, Albuquerque (2000), definem esse conceito como sendo formado por três conjuntos inter-relacionados, a saber:

i) O conjunto das situações (S) que dão sentido ao conceito, pois a entrada em um campo conceitual se daria pelas situações, sendo essas responsáveis pelo sentido que seria atribuído ao conceito, ou seja, um conceito tornar-se-ia significativo através de uma variedade de situações, sendo o foco de sua análise, o sujeito-em-ação.

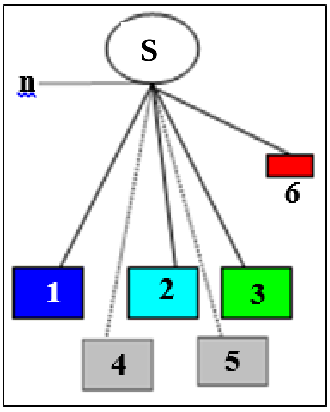
Nessa explanação, a autora está a se referir à resolução de um problema proposto, como por exemplo, sobre um determinado tópico matemático: as probabilidades.

ii) Os invariantes (I) sobre os quais repousa a operacionalidade dos conceitos. Esses invariantes representam aquilo que se preserva nos conceitos e que permite que sejam reconhecidos como tais nas situações, dando ***significado*** do conceito.

Nessa explanação, a autora está a se referir sobre os conceitos prévios a serem considerados na resolução do problema proposto, por exemplo: na formação do conceito sobre as probabilidades, precisaríamos conhecer: Amostra, universo, razão; operação com frações, decimais e percentuais: multiplicação, adição, simplificação e cancelamento; Racionais complementares; Critérios sobre o processo de divisibilidade; Uso lógico dos conectivos de Disjunção (OU) e Conjunção (E); União entre conjuntos, entre outros.

iii) As representações simbólicas (R) que podem ser utilizadas para indicar e representar os invariantes e, portanto, representar as situações e procedimentos para lidar com elas. É identificado como o ***significante*** do conceito.

Nessa explanação, a autora está a se referir aos algoritmos necessários à resolução do problema: As fórmulas operatórias.



Portanto, poderíamos resumir a Teoria dos Campos Conceituais da seguinte forma: a construção de um conceito "S", por si só não existe. A priori, conceituar "S" depende da condição de poder atrelá-lo a uma gama de conceitos diretos (1, 2 e 3) e indiretos (4 e 5) e ainda poder explorar sua conexão com futuros conceitos ainda não contemplados (6 e n). Teremos assim, anexado ao conceito "S", um subconjunto do campo conceitual, formado de conceitos prévios que o justifique e lhe dê sentido. Tais conexões tendem a apresentar êxito se utilizarmos os conhecimentos prévios, formais e informais, adquiridos pelo aluno no seu deslocamento imaginário pelo campo conceitual ao qual o conceito "S" pertence.

Então, ao considerarmos, por exemplo, os componentes dos campos conceituais de alguns tópicos da matemática básica, entre eles, situações que envolvam as *proporções, ou as probabilidades, ou ainda, as combinações*, enquanto formação conceitual, devemos considerar três dimensões interligadas: As ***situações*** *problemas, as* ***invariantes*** *operatórias e as* ***representações*** *simbólicas.*

Para essas autoras, o conhecimento está organizado em campos conceituais, considerados nessa teoria como conjuntos de situações para a compreensão dos quais se requer uma variedade de conceitos, procedimentos e representações simbólicas fortemente conectadas entre si. Como exemplo, podemos citar o campo conceitual das probabilidades, no qual os racionais se encontram inseridos, por envolver a compreensão de razão fracionária como relação entre a parte de um todo e o espaço considerado, operações aditivas e multiplicativas com números racionais e suas regras operacionais, entre outras.

Nesse campo conceitual devemos priorizar os conceitos prévios diretamente envolvidos na situação e os indiretos, tais como os critérios sobre divisibilidade e as operações de cancelamento por exemplo, além de suas representações, ou seja, seus algoritmos de resolução. Para os exemplos citados, poderíamos considerar os seguintes campos conceituais:

Conceito: **Proporções**		
Situações que envolvem o conceito de Proporção:	Invariantes operatórios passíveis de serem enunciados pelos alunos	Representações simbólicas
Distribuição de capital de forma direta ou inversamente proporcional a ganhadores de um prêmio lotérico; Razão de proporcionalidade entre volumes; Regras de 3 simples e composta; Operações sobre porcentagens; Escalas de medidas; Problemas sobre frações, decimais e percentuais; Realização de tarefas por um conjunto de elementos com capacidade individual diferenciada;	Operação com frações: Igualdade, multiplicação e adição, Simplificação e cancelamento, frações inversas; Frações inversas; Critérios sobre o processo de divisibilidade, Fatoração em primos, potências e MMC	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b}$ *de um valor* $\frac{a}{b} = valor$ $\frac{1}{b} \pm \frac{1}{c} = \frac{c \pm b}{bc}$

Conceito: **Probabilidades**		
Situação que envolve o conceito de Probabilidade	Invariantes operatórios passíveis de serem enunciados pelos alunos	Representações simbólicas
Escolha aleatória de uma amostra em um determinado universo;	Razão Operação com frações, decimais e percentuais:	$P(x) = \frac{a}{b}$

Escolha aleatória de uma ou mais amostras em um determinado universo; Escolhas aleatórias de mais de uma amostra em um determinado universo	Multiplicação, adição, simplificação e cancelamento; Racionais complementares; Critérios sobre o processo de divisibilidade, Uso lógico dos conectivos de Disjunção (OU) e Conjunção (E) União entre conjuntos	$P(y)=\frac{c}{b}$ a e b são as amostras b é o universo $P(x)\ ou\ P(y)=P(x)+P(y)-P(x)\cap P(y)$ $P(x)\ e\ P(y)=P(x).P(y)$ Sendo A e B dois conjuntos não vazios, temos que: $AUB=A+B-A\bigcap B+D$ D é um possível conjunto disjunto.

Conceito: **Combinações**		
Situação que envolve o conceito de Combinação	Invariantes operatórios passíveis de serem enunciados pelos alunos	Representações simbólicas
Escolha das possibilidades de formação sub conjuntos em um determinado universo, quando a ordem dos elementos não interferir no resultado.	Razão; Operação com frações: Multiplicação, adição, simplificação e cancelamento; Critérios sobre o processo de divisibilidade; Uso lógico dos conectivos de Disjunção (OU) e Conjunção (E) União entre conjuntos Probabilidades; Combinação complementar	$C_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ $P(x)=\frac{a}{b}$ a é a amostra. b é o universo $P(x)\ ou\ P(y)=P(x)+P(y)-P(x)\cap P(y)$ $P(x)\ e\ P(y)=P(x).P(y)$ $AUB=A+B-A\bigcap B+D$ D é conjunto disjunto.

1.1 - Sobre as Proporções.

1) Definição: Igualdade entre duas ou mais razões.

Propriedade fundamental

Exemplo:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow a.d=b.c \qquad \frac{1^{o}\,termo}{2^{o}\,termo}=\frac{3^{o}\,termo}{4^{o}\,termo}$$

Meios: 2º e 3º termos; Extremos: 1º e 4º termos

a e **c** → antecedentes **b** e **d** → consequentes

As alterações nos termos de uma proporção são possíveis desde que não altere a propriedade fundamental

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\rightarrow\frac{c}{d}=\frac{a}{b}=a.d=b.c$$

2) Quarta proporcional

Exemplo: A quarta proporcional entre 2, 7 e 18 é:

Resolução: $\frac{2}{7}=\frac{18}{x}\rightarrow 2x=7.18\rightarrow x=7.9\rightarrow x=63$

3) Proporção Contínua

Diz-se que uma proporção é contínua quando os meios ou os extremos são iguais. Exemplo:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

4) Média Proporcional

Numa proporção contínua, os meios iguais são chamados de média proporcional dos extremos. Exemplo: Determinar a média proporcional entre 3 e 12.

$$\frac{3}{b}=\frac{b}{12}\rightarrow b^{2}=3.12\rightarrow b=\sqrt{36}\rightarrow b=6$$

5) Terceira Proporcional

Determinar a terceira proporcional entre 3 e 6.

d = quociente entre o quadrado do segundo e o primeiro valor dado.

$$d = \frac{6^2}{3} \rightarrow d = 12$$

$$\frac{3}{6} = \frac{6}{d} \rightarrow 3d = 6.6 \rightarrow d = 36:3 \rightarrow d = 12$$

6) Dado uma proporção composta por duas ou mais razões, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes assim como a enésima potência do antecedente está para a enésima potência do consequente de uma das razões.

Exemplos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a.c}{b.d} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \rightarrow \frac{a.c.e}{b.d.f} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{e^3}{f^3}$$

7) As potências ou raízes dos termos de uma proporção composta por duas razões formam uma proporção se mantiverem graus e índices iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{com\ n\ \in N^*} \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \xrightarrow{ou} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

8) Cálculo do coeficiente de proporcionalidade

Exemplo: Dividir 240 em partes diretamente proporcionais a 3, 4 e 5

Valor a ser dividido: 240

Adição das partições = 3 + 4 + 5 = 12

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \rightarrow \frac{240}{12} \rightarrow k = 20 \text{ (c. de proporcionalidade)}$$

Caso se pretendêssemos saber quanto coube ao primeiro, bastaria multiplicar k por 3. Ao segundo, k por 4 e ao terceiro, k por 5.

9) Procedimento prático para divisão em partes diretas, inversas ou diretas e inversas, simultaneamente:

- Adicione as **partições**;
- Divida o "**valor total**" pela soma das partições;
- Multiplique o **quociente** obtido pela partição correspondente a(s) pergunta(s).

Entenda-se por "partição" as partes a que a proporção se refere; "valor total" o inteiro, o todo, os 100% a ser fracionado proporcionalmente a essas partes. Vejamos:

Exemplo1:

(IFAM, 2004), Se o ponto M divide um segmento AB, de 18 cm, na razão 2 para 7, as medidas dos segmentos AM e MB são, respectivamente, em cm:

Resolução:

Dados: 2 e 7 são as "partições" e 18, o "valor total"

$$\frac{AM}{MB}=\frac{2}{7}\xrightarrow{guia}AM+MB=18$$

- Adicionando as partições: 2 + 7 = 9
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: 18:9 = 2
- Multiplicando o quociente pela partição de AM: 2 x 2 = 4 e de MB: 2 x 7 = 14

Exemplo2:

Paulo e Rebeca jogaram na loteria e ganharam R$ 120.000,00. Como Paulo contribuiu com R$ 3,00 e Rebeca com R$ 5,00, combinaram que o prêmio seria dividido em partes diretamente proporcionais a estas quantias. A quantia que Rebeca recebeu foi de:

Resolução:

Dados: 3 e 5 são as "partições" e 120.000,00, o "valor total"

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}\xrightarrow{guia}a+b=120$$

- Adicionando as partições: 3 + 5 = 8
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: 120:8 = 15
- Multiplicando o quociente pela partição de b (Rebeca): 15x5=75.000

Exemplo3:

Três servidores compraram um presente de aniversário para um colega. Para tal, contribuíram com quantias **inversamente** proporcionais aos seus respectivos tempos de serviço na corporação: 2 anos, 5 anos e 8 anos.

Se o presente custou R$ 66,00, cada um deles desembolsou:

Resolução:

Dados: ½, 1/5 e 1/8 são as "partições" e 66,00, o "valor total"

$$\frac{A}{\frac{1}{2}}=\frac{B}{\frac{1}{5}}=\frac{C}{\frac{1}{8}}\xrightarrow{guia} a+b+c=66$$

- Adicionando as partições: $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{33}{40}$
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: $66:\frac{33}{40}\rightarrow 66.\frac{40}{33}=80$
- Multiplicando o quociente pelas partições de a, b e c:

$(a)\ \ 80x\frac{1}{2}=40 \qquad (b)\ \ 80x\frac{1}{5}=16 \qquad (c)\ \ 80x\frac{1}{8}=10$

Exemplo4:

Uma empresa da ZF pretende dividir um abono de R$ 28.800,00 para três funcionários, em partes **diretamente** proporcionais ao número de horas extras efetuadas acima da média. Sabendo que esses funcionários realizaram, respectivamente, 4, 6 e 8 horas extras acima da média, determine quanto recebeu o funcionário com maior número de horas extras acima da média.

Resolução:

Dados: 4, 6 e 8 são as "partições" e 28.800,00, o "valor total"

- Adicionando as partições: 4 + 6 + 8 = 18
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: 28.800 : 18 = 1600
- Multiplicando o quociente pela partição de maior proporção: 1600 x 8 = 12.400,00

Exemplo5:

A política interna de uma determinada empresa do DI é estimular a assiduidade de seus funcionários com recompensas.

No mês de dezembro, a quantia de 4.628,00 foi dividida como abono, entre três funcionários de forma **inversamente** proporcional ao número de faltas de cada um.

Sabendo que o funcionário **A** faltou 4 dias, o funcionário **B** faltou 6 dias e a funcionária **C** faltou 8 dias, determine quanto o funcionário **B** recebeu de abono.

Resolução:

Dados: ¼, 1/6 e 1/8 são as "partições" e 4.628,00, o "valor total"

- Adicionando as partições: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8} \to \frac{6+4+3}{24}=\frac{13}{24}$
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: $4628:\frac{13}{24} \to 4628x\frac{24}{13} \to 356x24=8544$
- Multiplicando o quociente pelas partições de a, b e c:

A → $8544x\frac{1}{4}=2136$ B → $8544x\frac{1}{6}=1424$ C → $8544x\frac{1}{8}=1068$

Exemplo6:

Seja dividir 356 em partes diretamente proporcionais a 2, 3 e 4 e inversamente proporcionais a 3, 2 e 5.

Resolução

Dividir um valor simultaneamente em partes direta e inversamente proporcionais a dois ou mais números é o mesmo que o dividir pelo produto entre essas condições.

$2x\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $3x\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $4x\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

Então, é o mesmo que diretamente proporcionais a $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\ e\ \frac{4}{5}$

- Adicionando as partições: $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+\frac{4}{5} \to \frac{20+45+24}{30}=\frac{89}{30}$
- Dividindo o "valor total" pela soma das partições: $356:\frac{89}{30} \to 356x\frac{30}{89} \to 4x30=120$
- Multiplicando o quociente encontrado pelas partições de a, b e c:

A = $120x\frac{2}{3}=80$

B = $120x\frac{3}{2}=180$

C = $120x\frac{4}{5}=96$

Verificando: 80 + 180 + 96 = 356

1.2 - Sobre as Probabilidades.

1) Definição

Segundo a Professora Eva.Rocha (2015), probabilidade é a razão entre o que queremos (**evento**) para o que temos (**espaço amostral**).

Espaço amostral (Ω)

O universo considerado. O que é possível. Exemplo: Números naturais menores que 10.

Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Evento

O que queremos desse espaço amostral. O que nos é favorável. Exemplo: Números primos.

E = {2, 3, 5, 7}

2) Probabilidade de um Evento

$$\Pr obabilidade = \frac{favoráveis}{possíveis} \rightarrow \frac{O \quad que \quad queres}{O \quad que \quad tens}$$

$$P(A) \geq 0, \; para \; qualquer \; A \subset \Omega$$

Exemplo$_1$ Uma urna contém dez bolinhas, sendo quatro delas azuis e seis vermelhas. Ao retirar aleatoriamente uma dessas bolas da urna, qual a probabilidade que ela seja vermelha?

Resolução:

Precisamos retirar uma das seis bolas vermelhas (*favoráveis)* de um total de dez bolas (*possíveis):* $P = \frac{6}{10} \rightarrow 0,6 = 60\%$

Exemplo$_2$ Uma urna contém dez bolinhas, numeradas de 1 a 10. Ao retirar aleatoriamente uma dessas bolas da urna, qual a probabilidade que ela tenha um número par?

Resolução:

$$\Pr obabilidade = \frac{favoráveis}{possíveis} \rightarrow \frac{O \quad que \quad queres}{O \quad que \quad tens}$$

Precisamos retirar uma das cinco bolas que contém número par (***favoráveis)*** de um total de dez bolas (***possíveis****)*

$$P = \frac{5}{10} \rightarrow 0,5 = 50\%$$

3**) Probabilidade do Evento Complementar:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemplo: Em uma urna existem bolas numeradas de 1 a 10. Seja A o conjunto dos múltiplos de 3 e A^C o conjunto dos NÃO múltiplos de 3 contidos nessa urna.

P(A) = $\frac{3}{10}$ ou 30% P(A^C) = $\frac{7}{10}$ ou 70%

P(A) + P(A^C) = 1 ou 100%

4) Probabilidade da União de Dois Eventos – Regra da Soma

Situação 1: Imaginemos uma urna contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retira-se uma bola ao acaso. Determinar a probabilidade de seu número ser par **ou** maior que 5.

U = 10 (Universo considerado: bolas de 1 a 10)

A = {2, 4, 6, 8, 10} A = 5

B = {6, 7, 8, 9, 10} B = 5

A∩B = {6, 8, 10} A∩B =3

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(AUB) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{3}{10}$$

$$P(AUB) = \frac{7}{10} \rightarrow P(AUB) = 70\%$$

Sendo A∩B = ∅ os eventos são tidos como mutuamente exclusivos

$P(AUB) = P(A) + P(B)$, quando A $\cap$ B=Φ

Situação2: Imaginemos uma urna contendo 10 bolas numeradas de 1 a 10. Retira-se uma bola ao acaso. Determinar a probabilidade de seu número ser primo **ou** maior que 7.

U = 10 (Universo considerado: bolas de 1 a 10)

A = {2, 3, 5, 7} A = 4

B = {8, 9, 10} B = 3

A∩B = { } A∩B =0

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(AUB) = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} - 0$$

$$P(AUB) = \frac{7}{10} \rightarrow P(AUB) = 70\%$$

5) Probabilidades de Eventos Simultâneos ou Sucessivos – Eventos Independentes

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Exemplo1: Duas urnas contém 6 bolas pretas e 4 brancas. Duas delas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Determinar a probabilidade de se retirar duas bolas pretas.

1ª retirada → $p(A) = \frac{6}{10}$

2ª retirada → $p(B) = \frac{5}{9}$

$$p(A \cap B) = \frac{6}{10}.\frac{5}{9} \rightarrow p(A \cap B) = \frac{30}{90}$$

$$p(A \cap B) = 33,33\%$$

6) Probabilidade Condicional

$p(A \cap B) \rightarrow$ Probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente

$$p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$$

$p(B/A) \rightarrow$ Probabilidade de ocorrer B tendo ocorrido A.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Exemplo: Em uma urna contém 50 bolas numeradas de 1 a 50. Sabe-se que a bola sorteada é ímpar. Calcular a probabilidade de ser um múltiplo de 3.

Observe que o número da bola sorteada PODE SER múltiplo de 3.

A = 25 números ímpares no intervalo de 1 a 50.

B = 16 múltiplos de 3. (Pode ser obtido por PA)

A ∩ B = 8 números múltiplos de 3 e ímpares.

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \rightarrow \frac{8}{25} = 32\%$$

1.3 - Sobre Análise Combinatória: Combinações.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$ com p ≤ n e **p** e **n** ∈ IN

Onde n é o conjunto universo e p é o subgrupo que se pretende formar.

Pode ser resolvido por permutação de $\frac{A_{n,p}}{p!}$ com p ≤ n

Atenção!

Em geral, quando o problema envolver números, trata-se de arranjo. Quando envolver anagramas ou troca de posiçao, é permutação. Quando envolver comissões ou pontuação, trata-se de combinação. Podendo haver exceções. Por exemplo: ao formarmos números de três algarismos com os elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, trata-se de um arranjo: $A_{n,p}$, mas ao adquirirmos ingressos para uma peça de teatro tendo como 30, 24, 12 e 5 a numeração das cadeiras entre as 60 existentes, trata-se de uma combinação: $C_{n,p}$.

Exemplos:

01. Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas podemos compor uma comissão de 3 pessoas?

Resolução:

Observem que não há exigência no enunciado para a composição das comissões, podendo nesse caso, haver comissões composta somente por homens ou por mulheres. Além disso, escolher Manuel, José e Pedro é indiferente de escolher Pedro, Manuel e José. Logo, trata-se de combinação.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \rightarrow \frac{11!}{(11-3)!3!} \rightarrow \frac{11x10x9x8!}{8!.3!} \rightarrow \frac{11x10x9}{3x2x1} \rightarrow 11x5x3 = 165$$

Poderíamos resolver por permutação de n em p vezes num sistema de caixas, isentando-o do fatorial. Em seguida, dividimos o produto encontrado pelo fatorial de p.

Vejamos como:

$$C_{11,3}\begin{cases} n = 11 \\ p = 3 \end{cases}$$

$$C_{11,3} = \frac{\boxed{11}\,\boxed{10}\,\boxed{9}}{3!} \rightarrow \frac{11.10.9}{3.2.1} \rightarrow 11.5.3 = 165$$

Solução: 11 x 5 x 3 = 165 resultados.

02. Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas podemos compor uma comissão de 3 pessoas, de forma que cada comissão contenha 2 mulheres e 1 homem?

Resolução:

Observem que neste exemplo há exigência no enunciado para a composição das comissões, não podendo nesse caso, haver comissões composta somente por homens ou por mulheres, como foi o caso anterior.

Atenção!

- Cada comissão terá duas de seis mulheres "**E**" um de cinco homens.
- Modificando-se a ordem de dois elementos na comissão o resultado não se altera. Trata-se, portanto de combinação.
- Como o conectivo "**E**" indica produto entre as combinações parciais, essa operação pode ser efetuada em um só bloco, minimizando os cálculos através do cancelamento, quando possível. Vejamos:

- $C_{6,2}$ e $\mathrm{C}_{5,1} \rightarrow \dfrac{6x5}{2}\, x \,\dfrac{5}{1} \rightarrow 15x5 = 75$

03. Dispondo de um conjunto formado por sete médicos e cinco enfermeiros, queremos formar *equipes* compostas por três médicos e dois enfermeiros. Quantas equipes podem ser formadas, nessas condições?

Resolução:

Observem que neste exemplo há exigência no enunciado para a composição das equipes, não podendo nesse caso, haver equipe composta somente por médicos ou por enfermeiros.

Atenção!

- O universo não é 12, pois há exigência no enunciado para formação das equipes.
- Modificando-se a ordem de dois elementos na equipe o resultado não se altera. Trata-se, portanto de combinação.
- Cada comissão terá três dos sete médicos "**E**" dois dos cinco enfermeiros.

Vejamos:

$$C_{7,3} \rightarrow \frac{7 \; 6 \; 5}{3!} \rightarrow \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35 \quad \text{e} \quad C_{5,2} \rightarrow \frac{5 \; 4}{2!} \rightarrow \frac{5x4}{2x1} = 10$$

- O conectivo “**E**” implica multiplicação entre as combinações parciais.

35 x 10 = 350 opções.

Como o conectivo “**E**” indica produto entre as combinações parciais, poderíamos ter efetuado essa operação em um só bloco, minimizando os cálculos através do cancelamento, quando possível. Vejamos:

$$C_{7,3}.C_{5,2} \rightarrow \frac{7 \; 6 \; 5}{3!} x \frac{5 \; 4}{2!} \rightarrow \frac{7.6.5}{3.2.1} x \frac{5.4}{2} \rightarrow 7.5.5.2 = 350$$

1.3.1 – Combinações Complementares

As combinações complementares são iguais: $C_{7,4} = C_{7,3}$

Se **p** é maior do que a metade de **n** é aconselhável utilizarmos a complementar da combinação dada. Veja como no exemplo 01:

01. Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7, e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Resolução:

Pensemos como se fôssemos adquirir essas cadeiras para nosso uso. A ordem de escolha não alteraria o resultado. Trata-se de uma combinação de 7, 4 a 4 que pode ser resolvida pela combinação de 7, 3 a 3 (***Combinação complementar***).

$$C_{7,3} \rightarrow \frac{7 \; 6 \; 5}{3!} \rightarrow \frac{7x6x5}{3x2x1} = 35$$

02. Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?

Resolução:

$$C_{n,2} = 45 \rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)}}{2\cancel{(n-2)}} = 45 \rightarrow n^2 - n = 90$$

Nos deparamos aqui com uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 - sx + p = 0, \;\; com\; a = 1$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

Pensemos em dois números que apresentam produto igual a 90 e soma igual a 1. (Como o sinal do produto modificou-se e o da soma não, o menor é negativo e o maior é positivo.

$$n^2 - n - 90 = 0 \begin{cases} -9 \\ 10 \end{cases}$$

Atenção!

Em combinação, esse tipo de questão sempre mantém o mesmo padrão de resolução: Uma equação de 2º grau com a menor raiz negativa e que deve ser desprezada.

03. Uma empresa possui 20 funcionários, dos quais 10 são homens e 10 são mulheres. Desse modo, o número de comissões de 5 pessoas que se pode formar com 3 homens e 2 mulheres é:

a) 5400 b) 165 c) 1650 d) 5830 e) 5600

Resolução:

- Atenção! O universo não é 20. Devemos resolver por $C_{10,3}$ E $C_{10,2}$

$$C_{10,3} \rightarrow \frac{\cancel{10}x\cancel{9}x8}{\cancel{3}x\cancel{2}x1} = 120 \;\; \text{e} \;\; C_{10,2} \rightarrow \frac{\cancel{10}x9}{\cancel{2}x1} = 45$$

120 x 45 = 5400 opções

Como o conectivo "**E**" indica produto entre as combinações parciais, poderíamos ter efetuado essa operação em um só bloco, minimizando os cálculos através do cancelamento, quando possível. Vejamos:

$$C_{10,3}.C_{10,2} \rightarrow \frac{10x9x8}{3x2x1} x \frac{10x9}{2x1} \rightarrow 10.3.4.5.9 = 5400$$

1.3.2 – Combinações por Partição

Nas combinações por partição, cada combinação, a partir da segunda, depende da anterior para formação do universo n a ser considerado.

Exemplo:

(CESPE/BB, 2007), Considere que 7 tarefas devam ser distribuídas entre 3 funcionários de uma repartição de modo que o funcionário mais recentemente contratado receba 3 tarefas, e os demais, 2 tarefas cada um. Nessa condição, sabendo-se que a mesma tarefa não será atribuída a mais de um funcionário, é correto concluir que o chefe da repartição dispõe de menos de 120 maneiras diferentes para distribuir essas tarefas.

a) Certo ***b)*** Errado

Resolução:

As tarefas devem ser distribuídas entre F_1 e F_2 e F_3. A ordem da distribuição não é relevante, portanto trata-se de combinação.

Como o conectivo "**E**" indica produto entre as combinações parciais, efetuaremos essa operação em um só bloco, minimizando os cálculos através do cancelamento, quando possível.

Vejamos: $C_{7,3}.C_{4,2}.C_{2,2} \rightarrow \frac{7.6.5}{3.2} x \frac{4.3}{2} x1 \rightarrow 7.5.2.3.1 = 210$

Percebam que:

- Na primeira combinação n é igual a 7 dado que nenhuma das tarefas fora distribuída.
- Na segunda combinação n é igual a 4 dado que 3 das tarefas já foram distribuídas.
- Na terceira combinação n é igual a 2 dado que 5 das tarefas já foram distribuídas.

1.4 – Sobre as Razões Fracionárias.

1.4.1 – Definição de Fração

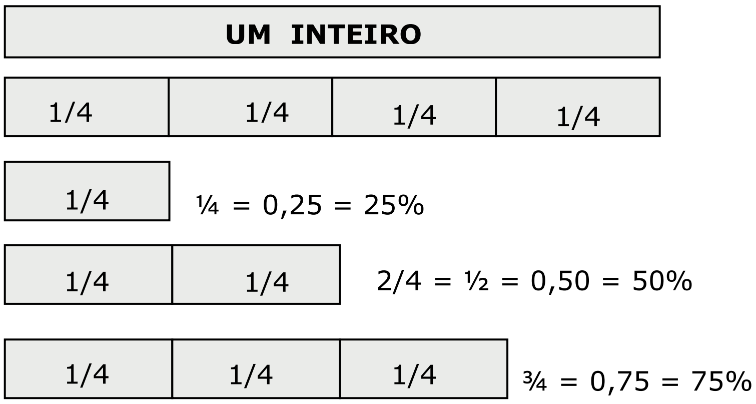
Segundo Barbosa (1986), um racional fracionário é um par ordenado [n, d] de naturais, com d ≠ 0, escrito na forma de fração [n / d] que representa parte(s) de um todo, sendo composto por dois termos: $\frac{n}{d}$

Numerador (n), indica a quantidade de partes que se tomou do todo.

Denominador (d), indica em quantas partes foi dividido o todo.

Uma fração é considerada irredutível quando o MDC entre os seus termos for igual a 1, ou seja, quando seus termos forem primos entre si.

1.4.2 – Representação

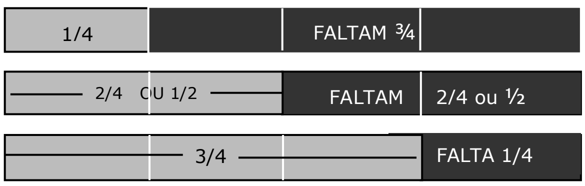


1.4.3 – Fração Complementar

Em questões de concursos envolvendo problemas fracionários são comuns as situações em que é fornecida ou é encontrada uma determinada fração, mas a pergunta se refere ao que falta para o inteiro. Exemplos: … o acerto foi de 3/5 quanto foi o erro?; … 25% são do sexo feminino qual o percentual dos homens?; … 0,12 foi o prejuízo, quanto restou?

Então, vale a pena compreendermos esse tipo de linguagem.

Vejamos, caso tenhamos:



1.4.4 – Tipos de frações

Própria – Fração cujo numerador é **menor** que o denominador. Essa fração é sempre menor que 1.

Exemplo: $\frac{2}{5} \rightarrow \textit{faltam } \frac{3}{5} \textit{ para } 1$

Imprópria – Fração cujo numerador é **maior** que o denominador. Essa fração é sempre maior que 1.

Exemplo: $\frac{5}{4} \rightarrow \textit{Existem } \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow 1 + \frac{1}{4}$

Aparente – Fração igual à unidade

Exemplos: $\frac{4}{4} = 1$; $\frac{6}{3} = 2$; $\frac{15}{3} = 5$

Irredutível – Fração cujos termos são primos entre si

Exemplo: $\frac{9}{4}$

Para obtermos uma fração irredutível, dividimos os seus termos pelo MDC entre eles.

Exemplo: Dada a fração $\frac{16}{20}$

MDC (16, 20) = 4

$$\frac{16:4}{20:4} = \frac{4}{5} \quad \text{(Fração irredutível)}$$

Mista – Fração imprópria representada por uma parte inteira e uma fracionária

$$\frac{5}{4} \rightarrow \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow 1\ \frac{1}{4} \quad (\textit{fração mista})$$

Transformação de um número misto em uma fração imprópria

$$4\frac{3}{5} \rightarrow \frac{4x5+3}{5} = \frac{23}{5}$$

Aproveitando-se desse mecanismo, podemos resolver as sentenças a seguir como se números mistos fossem:

$$4+\frac{3}{5} \rightarrow \frac{4x5+3}{5} = \frac{23}{5}$$

$$1+\frac{3}{5}\rightarrow\frac{1x5+3}{5}=\frac{8}{5} \quad \text{ou} \quad 1+\frac{3}{5}\rightarrow\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

$$4-\frac{3}{5}\rightarrow\frac{4x5-3}{5}=\frac{17}{5}$$

$$1-\frac{3}{5}\rightarrow\frac{1x5-3}{5}=\frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad 1-\frac{3}{5}\rightarrow\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

Transformação de uma fração imprópria em um número misto

$$\frac{23}{5}\rightarrow\begin{array}{c|c} 23 & 5 \\ \hline 3 & 4 \end{array}\rightarrow 4\frac{3}{5} \quad \text{ou} \quad 4+\frac{3}{5}$$

1.4.5 – Operações com frações

Adição e subtração

A operação de adição entre frações somente é possível se os denominadores forem iguais. Caso não sejam, faz-se a redução dos denominadores ao seu mínimo múltiplo comum.

Seja efetuar a seguinte operação:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\xrightarrow{MMC=20}\frac{10+4-5}{20}=\frac{9}{20}$$

$$1+\frac{1}{5}\rightarrow\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{1x5+1}{5}=\frac{6}{5}$$

$$1-\frac{1}{5}\rightarrow\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{1x5-1}{5}=\frac{4}{5}$$

Produto entre Frações / Cancelamento

A matemática fica mais prazerosa quando utilizamos mecanismos de simplificação para resolução de produtos fracionários. Portanto é preciso dominar os critérios básicos de divisibilidade, no mínimo por 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, e 15.

Para não complicar, evite multiplicar. Faça “cancelamento” sempre que a divisibilidade permitir.

Vejamos:

Produto entre Frações **[Cancelamento]**

Na multiplicação de duas ou mais frações, podemos "cancelar" ou simplificar o numerador de uma fração pelo denominador de outra fração e vice versa.

$$\frac{18}{27} x \frac{5}{12} x \frac{27}{25} x \frac{60}{90} x \frac{30}{90} =$$

Aprendemos nas séries iniciais do ensino fundamental que esse produto é solucionado por multiplicação dos numerados e dos denominadores entre si. Correto. Mas, imagine-se fazendo esse tipo de operação e a magnitude do resultado obtido. Certamente ocasionaria falha na obtenção do resultado final em decorrência da magnitude dos números envolvidos.

$$\frac{18}{27} x \frac{5}{12} x \frac{27}{25} x \frac{60}{90} x \frac{30}{90} = \frac{4374000}{65610000}$$

Então, como fazer?

Inicialmente, simplificamos as frações envolvidas na expressão:

$$\frac{18}{27} x \frac{5}{12} x \frac{27}{25} x \frac{60}{90} x \frac{30}{90} = \qquad \frac{2}{3} x \frac{5}{12} x \frac{27}{25} x \frac{2}{3} x \frac{1}{3} =$$

Para então darmos início ao cancelamento.

Caso o numerador e o denominador de duas das frações envolvidas sejam múltiplos (divisíveis), dividimos o maior pelo menor termo, colocando o quociente encontrado no lugar do termo de maior valor e 1 no de menor valor.

$$\frac{2}{3} x \frac{5}{12} x \frac{27}{25} x \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{3} x \frac{1}{6} x \frac{9}{5} x \frac{2}{1} x \frac{1}{3}$$

Observem que a expressão já se encontra bastante reduzida. Poderíamos multiplicar 9 x 2 no numerador e 3 x 6 no denominador e cancelar os resultados obtidos.

$$\frac{1}{3} x \frac{1}{6} x \frac{9}{5} x \frac{2}{1} x \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{18} x \frac{18}{5} x \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \text{ (Solução)}$$

Divisão

O quociente entre duas frações se obtém multiplicando a primeira pelo inverso da segunda. Exemplos:

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{15} \rightarrow \frac{3}{5}x\frac{15}{4}=\frac{9}{4} \qquad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} \rightarrow \frac{3}{4}x\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$$

1.4.6 – As frações e as potências

Na **potenciação**, quando elevamos um número fracionário a um determinado expoente, estamos elevando o numerador e o denominador a esse expoente, conforme os casos a seguir:

Quando o expoente for positivo:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 \rightarrow \frac{4^2}{3^2}=\frac{16}{9} \quad ; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \rightarrow \frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}$$

Atenção para o caminho de volta:

$$\frac{16}{9} \longrightarrow \frac{4^2}{3^2}=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \qquad \frac{8}{27} \longrightarrow \frac{2^3}{3^3}=\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Quando o expoente for negativo:

Primeiro invertemos os termos da fração para tornar o expoente positivo.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \xrightarrow{\text{recíproco da base}} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \rightarrow \frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$$

A fração invertida denomina-se: ***recíproco*** da fração anterior.

Quando o expoente for fracionário:

Exemplo: $4^{\frac{3}{2}} \rightarrow \sqrt{4^3} \rightarrow \sqrt{4^2.4^1} \rightarrow 4\sqrt{4}=8$ ou por fatoração da base $4^{\frac{3}{2}} \rightarrow 2^{2(\frac{3}{2})} \rightarrow 2^3=8$

Atenção para o caminho de volta:

$\sqrt{4^3} \rightarrow 4^{\frac{3}{2}}$

O índice do radicando é sempre o denominador da fração expoente

1.4.7 – As frações e os radicais

$\sqrt{\frac{16}{25}} \rightarrow \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$ /

O radical de uma fração é uma fração de radicais de mesmo índice

Atenção para o caminho de volta:

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} \rightarrow \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ /

Uma fração de radicais de mesmo índice é um radical de uma fração

1.4.8 – Problemas envolvendo frações

Exemplo: A sargento Cíntia dirige seu carro no percurso entre o quartel e a faculdade onde cursa o 4º período de Direito. Supondo que nesse trajeto ela estaciona para jantar quando havia percorrido 1/5 do itinerário, parando novamente para efetuar cópias de material quando havia percorrido mais 2/3 do itinerário. Sabendo que ainda faltam 4 km para chegar ao seu destino, pergunta-se: Qual distância que Cíntia dirige do quartel à faculdade?

Resolução aritmética: Primeiro determinamos o percurso fracionário realizado:

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}$$

Segundo, determinamos a fração que falta para o inteiro: $\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$

Terceiro, igualamos a fração encontrada ao valor que falta para Cíntia chegar à faculdade, obtendo a distância do quartel à faculdade:

$$\frac{2}{15} = 4 \rightarrow \frac{1}{15} = 2 \rightarrow \frac{15}{15} = 15x2 = 30km$$

Resolução algébrica: Seja **x** o percurso total

$$\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}x + 4 = x \xrightarrow{MMC(3,5)=15} 3x + 10x + 4.15 = 15x$$

$$13x + 4.15 = 15x \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 30km$$

Atenção!

Nos problemas com racionais, em geral pode ocorrer uma ou mais das três situações a seguir:

- Fração **DE** um valor. Implica dividirmos o valor pelo denominador e multiplicarmos o quociente pelo numerador para encontrarmos a parte procurada. Nesse caso é conveniente fazer uso da simplificação e do cancelamento: $\frac{n}{d}\ x\ valor$

  Exemplo: 2/5 **DE** 600 → 600 : 5 x 2 = 240

- Fração **IGUAL** a um valor. Implica dividirmos o valor pelo numerador e multiplicarmos o quociente pelo denominador para encontrarmos o inteiro procurado. Nesse caso é conveniente fazer uso da simplificação mas não do cancelamento.

$$\frac{n}{d} = valor \xrightarrow{busca-se\ o} \begin{cases} \text{int}\,eiro \\ ou\ a \\ parte \end{cases}$$

Exemplo: 2/5 = 600 → 600 : 2 x 5 = 1500

- Fração **IGUAL** a **uma hora**. Adição ou diferença entre frações **INVERSAS**. Implica dividirmos o produto entre os denominadores pela soma ou diferença entre esses mesmos denominadores para se obter o tempo de atuação em conjunto: $\frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} \rightarrow \frac{b \pm a}{ab} = \frac{ab}{b \pm a}$

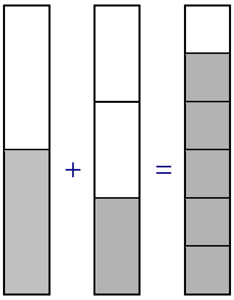
Exemplo: Sabe-se que uma máquina A executa uma tarefa em 2 horas e uma outra máquina B executa a mesma tarefa em 3 horas. trabalhando simultaneamente, presume-se que as máquinas A e B executem a tarefa em que tempo?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \qquad \frac{6}{6} : \frac{5}{6} \rightarrow \frac{6}{6} x \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \qquad \frac{6}{5} = \frac{5}{5} + \frac{1}{5} \longrightarrow 1h\ 12\min$$

1.4.9 – As frações e o problema das torneiras

Exemplo$_1$: Sabendo que uma torneira enche um tanque em 2 horas e uma outra enche o mesmo tanque em 3 horas. Abrindo-as simultaneamente, em quantas horas encherão o tanque?

DICA: O raciocínio principal deve ser concentrado na ideia de se encontrar a fração indicativa da parte do tanque que cada torneira enche em uma hora, pois encontrando a vazão das torneiras para uma hora, encontrar-se-á para quaisquer tempos.



A 1ª torneira enche em 1 hora a metade do tanque. A 2ª torneira enche em 1 hora a terça parte do tanque. Logo, em 1 hora, as duas torneiras encherão

Resolução aritmética: ½ + 1/3 = 5/6 do tanque.

Enchendo 5/6 em 60 minutos, encherão 1/6 em 12 minutos.
Logo, para encher 6/6 ou 100% do tanque, gastar-se-á 72 minutos = 1 hora e 12 minutos.

Resolução algébrica:

Seja **x** o tempo para enchimento do tanque pelas duas torneiras.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=60\,\text{min}$$

3x + 2x = 6 . 60 → 5x = 6. 60 → x = 72 min

Um terceiro e mais prático modo de resolução:

Tendo obtido a soma das frações, efetua-se a divisão da fração inteira por essa soma.

Exemplo: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$$\frac{6}{5}=\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\longrightarrow 1h\ 12\,\text{min} \qquad \frac{6}{6}:\frac{5}{6}\rightarrow\frac{6}{6}x\frac{6}{5}=\frac{6}{5}$$

Atenção!

Traduzindo o que foi feito: ½ + 1/3 = 5/6 do tanque será preenchido pelas duas torneiras em 1 hora.
6/6 : 5/6 = 6/5 de hora (fração de tempo necessária para que as duas torneiras completem o volume do tanque).

Exemplo$_2$: Sabendo que uma torneira enche um tanque em 4 horas; uma segunda torneira enche o mesmo tanque em 5 horas e uma válvula o esvazia em 3 horas. Abrindo-as simultaneamente, em quantas horas o tanque ficará cheio?

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\rightarrow\frac{15+12-20}{60}=\frac{7}{60}$$

$$\frac{60}{60}:\frac{7}{60}\rightarrow\frac{60}{60}x\frac{60}{7}\rightarrow\frac{60}{7}=8\frac{4}{7}h\ ou\ 8h\ 34\min\ 17seg$$

Raciocínio idêntico pode ser utilizado para resolução de problemas envolvendo variadas situações como as que se seguem:

Exemplo$_1$: Uma tarefa é executada por uma pessoa **x** em 2 horas e por uma pessoa **y** em 3 horas. As duas pessoas juntas executariam a mesma tarefa em quanto tempo?
Resposta 72 minutos ou 1 hora e 12 minutos.

Exemplo$_2$: Um operário sozinho executou um terço do trabalho em 6 dias. Com a contratação de um segundo operário para auxiliá-lo, o serviço ficou concluído em mais 4 dias.
Quantos dias seria necessário para o segundo operário executar o serviço sozinho?
Desempenho do 1º operário:

$\frac{1}{3}t=6\rightarrow t=6.3\rightarrow t=18$ dias para o primeiro operário concluir o serviço sozinho.

Com a contratação do 2º operário, concluiram os 2/3 restante em 4 dias. Logo:

$$\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{x}\right).4=\frac{2}{3}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}\rightarrow x=9$$

9 dias para o segundo operário concluir o serviço sozinho.

Capítulo IV
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Gerais:

- Pesquisa documental com ênfase na análise dos procedimentos aplicados pelo aluno na resolução das questões matemáticas em avaliações do tipo prova, independentemente do resultado obtido;
- Identificação do campo conceitual necessário à resolução das questões e dos défices de aprendizagens que culminaram com o erro;
- Formulação de questionário sobre os conhecimentos prévios necessários à resolução do tema da prova para ratificar os déficits de aprendizagens identificados;
- Análise dos resultados obtidos;
- Reapresentação dos conhecimentos prévios deficitários;
- Aplicação de reavaliação sobre o tópico matemático abordado em prova;
- Reanálise dos resultados obtidos.

Cada nível do conhecimento é fundamentado a partir de conceitos prévios que lhes dão validação. A ação eficaz do educador após verificar que o aluno não conseguiu desenvolver a resposta "adequada" para uma determinada questão será, utilizando-se das ferramentas que a pesquisa etnográfica lhe oferece, **detectar** e **mensurar** o(s) elemento(s) precursor(es) do erro, para que se possa articular uma ação pedagógica no sentido de **reverter** as dificuldades apresentadas.

Específicos:

Conscientizações do público interno:

A obtenção de êxito da escola em trabalhar o erro como mais uma ferramenta de aprendizagem requer o comprometimento dos personagens diretamente envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Para tanto, a escola deve colocar o assunto em discussão, promover palestras sobre o tema, buscando o envolvimento do corpo docente através da conscientização desses personagens e consequentemente, a obtenção dos efeitos positivos que dessa ação podem surgir.

Ações a serem executadas na instituição:

- Debate sobre resultados negativos obtidos em períodos anteriores;
- Pesquisa de opinião após debate;
- Promover palestra sobre o tema destinado ao público interno;
- Convidar palestrantes envolvidos com a temática proposta;
- Imprimir material para divulgação do evento;
- Efetuar mensuração periódica após palestra, do nível de aceitação, através de pesquisa de opinião;

Ações a serem executadas com os alunos:

Pesquisa de opinião sobre os possíveis elementos precursores do erro e, na sua visão, quais as ações que a escola deveria promover para reverter o seu possível fracasso.

1 - Análise do procedimento aplicado pelo aluno na resolução de questão matemática em avaliação do tipo prova:

Nossa análise não tem como foco apenas as causas que culminaram com o erro, mas também os excessos de procedimentos desenvolvidos pelo aluno por ocasião da resolução de uma determinada questão matemática, mesmo tendo obtido êxito em sua resposta, pois em muitos casos, o erro ocorre não apenas por falta de conhecimento prévio, mas sim pela dificuldade em finalizar o cálculo excessivo.

Vejamos a seguir, a análise das respostas, incluindo acertos, erros ou desenvolvimentos diferenciados, em avaliações do tipo prova, aplicadas a alunos do 1º e 2º ano do Ensino Médio, em escolas públicas ou privadas, sobre problemas envolvendo os conceitos de proporções, probabilidade e combinações, entre outras, acrescidas das nossas opções de procedimentos para resolução:

Situação 1

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio. Tema: Estatística

Conhecimentos prévios: Razão – Fração – Frequência relativa – Porcentagens – Probabilidades – Proporções – Divisão inexata.

ENEM, 2009 – No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

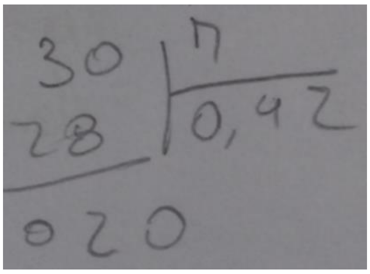
	Cidade	Turno			Cidade	Turno			Cidade	Turno
1	Aracajú (SE)	1º		10	Goiânia (GO)	2º		19	Recife (PE)	1º
2	Belém (PA)	2º		11	João Pessoa (PB)	1º		20	Rio Branco (AC)	1º
3	Belo Horizonte (MG)	1º		12	Macapá (AP)	1º		21	Rio de Janeiro (RJ)	1º
4	Boa Vista (RR)	1º		13	Maceió (AL)	2º		22	Salvado (BA)	2º
5	Campo Grande (MS)	2º		14	Manaus (AM)	2º		23	São Luiz (MA)	1º
6	Cuiabá (MT)	2º		15	Natal (RN)	2º		24	São Paulo (SP)	2º
7	Curitiba (PR)	2º		16	Palmas (TO)	1º		25	Teresina (PI)	2º
8	Florianópolis (SC)	2º		17	Porto Alegre (RS)	2º		26	Vitória (ES)	2º
9	Fortaleza (CE)	2º		18	Porto Velho (RO)	2º			Fonte:	TSE

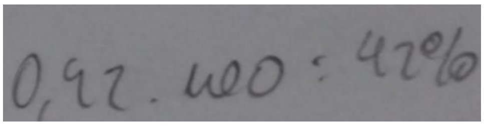
Na região Norte, a frequência relativa de eleição dos prefeitos do 2º turno foi, aproximadamente,

(A) 42,86% (C) 50,00% (E) 57,69% (B) 44,44%

(D) 57,14%

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (pública)





Análise da resposta:

O aluno JM conhece a relação entre as frações, os decimais e as porcentagens, tendo sido objetivo em busca da alternativa correta.

As nossas possíveis formas de resoluções:

Identificando as capitais dos estados da região norte: Belém, Boa Vista, Macapá, Manaus, Palmas, Porto Velho e Rio Branco.
Identificando as capitais dos estados da região norte onde ocorreu 2º turno: Belém, Manaus e Porto Velho.

Universo a considerar: 7 Sub espaço: 3 Razão: $\frac{3}{7}$

Devemos migrar a razão fracionária para a sua representação em porcentagem pois as alternativas impõem esse procedimento.

Modo 1 – A migração para o percentual se obtém multiplicando a fração por 100:

$$\frac{3}{7}x100 \rightarrow 42,857142 = 42,86\%$$

Modo 2 – A migração para o percentual se obtém multiplicando o decimal por 100:

$$\frac{3}{7} = 0,428571...x100 = 42,8571... = 42,86\%$$

Modo 3 – A migração para o percentual pode ser obtida por proporcionalidade:

$$\frac{3}{x} = \frac{7}{100} \rightarrow 7x = 3.100 \rightarrow x = \frac{3.100}{7} \rightarrow x = 42,8571... = 42,86\%$$

Modo 4 - A migração para o percentual se obtém por divisão. Observem que a resposta deve ser um valor aproximado. Então, quando parar? Vejamos quando se deve parar a divisão?

Como não é possível dividir 3 por 7, colocamos zero vírgula no quociente e ganhamos um zero para o dividendo e para cada resto que aparecer

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline 20 & 0,42 \end{array}$$

30 dividido por 7 dá 4 pois 4 x 7 = 28 restando ainda 2
Na certeza de que nosso cálculo foi bem sucedido, mantemos apenas as alternativas que se iniciam por 4, desprezando as demais

(A) 42,86% (B) 44,44% (C) 50,00% (D) 57,14% (E) 57,69%

Alocamos o zero presenteado pela vírgula ao resto. Dividindo 20 por 7 que nos dá 2 para o quociente e resto 6

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ \hline 20 & 0,42 \end{array}$$

Na certeza de que nosso cálculo foi bem sucedido, mantemos apenas a alternativa que se inicia por 42

(A) 42,86% (B) 44,44% (C) 50,00% (D) 57,14% (E) 57,69%

Situação 2

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

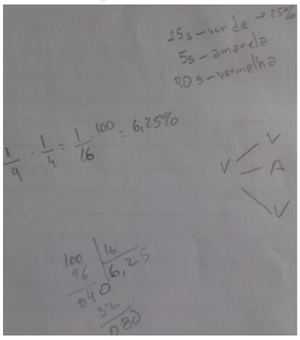
Tema: Probabilidades com eventos independentes

Conhecimentos prévios: Conectivo E (Lógica) – Frações – Porcentagens – Proporções – Divisão inexata.

ENEM, 2009 (Adaptada) – Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

(A) 1/25 (B) 6,25% (C) 11% (D)1/3 (E) 50%

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada, atentando para o conectivo envolvido.

As nossas possíveis formas de resoluções:

Universo: 3 cores (amarelo, verde e vermelho)   Sub espaço: 1 cor (verde)

Observem que a probabilidade de encontrar o semáforo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Então em 100 segundos, 25 são para a luz verde, 5 para amarela e 70 para a vermelha.

Passar pela primeira vez: $25\% = \frac{1}{4}$ Passar pela segunda vez: $25\% = \frac{1}{4}$

Passar na 1ª vez independe de passar na 2ª vez (eventos independentes). Então, multiplicamos as probabilidades envolvidas:

$$\frac{1}{4} x \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Razão: $\frac{1}{16}$

Das alternativas em fração, nenhuma delas equivale ao valor encontrado, então iremos nos concentrar nas alternativas em percentuais. Devemos migrar a razão fracionária para a sua representação em porcentagem pois as possíveis alternativas impõem esse procedimento.

(A) 1/25   (B) 6,25%   (C) 11%   (D)1/3   (E) 50%

Modo 1 – A migração para o percentual se obtém multiplicando a fração por 100:

$$\frac{1}{16} x100 = 6,25\%$$

Modo 2 – A migração para o percentual se obtém multiplicando o decimal por 100:

$$\frac{1}{16} = 0,065 \rightarrow 0,065x100 = 6,25\%$$

Modo 3 – A migração para o percentual pode ser obtida por proporcionalidade:

$$\frac{1}{x}=\frac{16}{100}\rightarrow 16x=1.100\rightarrow x=\frac{1.100}{16}\rightarrow x=6,25\%$$

Modo 4 - A migração para o percentual se obtém por divisão. Observem que a resposta deve ser um valor aproximado. Então, quando parar? Vejamos quando se deve parar a divisão?

Como não é possível dividir 1 por 16, colocamos zero vírgula no quociente e ganhamos um zero para o dividendo e para cada resto que aparecer

$$\begin{array}{r|l} 10 & 16 \\ \hline 10 & 0, \end{array}$$

Mas, ainda não é possível dividir 10 por 16. Nesse caso, acrescentamos um zero no dividendo e outro no quociente e efetuamos a divisão.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 16 \\ \hline 10 & 0,06 \end{array}$$

100 : 16 = 6, restando 4

Na certeza de que nosso cálculo foi bem sucedido, finalizamos a resolução, pois somente há uma alternativa em percentual iniciada por 6.

(A) 1/25 (B) 6,25% (C) 11% (D)1/3 (E) 50%

Situação 3

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Probabilidades com eventos independentes

Conhecimentos prévios: Conectivo E (Lógica) – Fração complementar e Leitura fracionária – Decimais – Porcentagens – Divisão com denominador na base 10.

(ENEM, 2000) (Adaptada), Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1^a opção: comprar três números para um único sorteio.

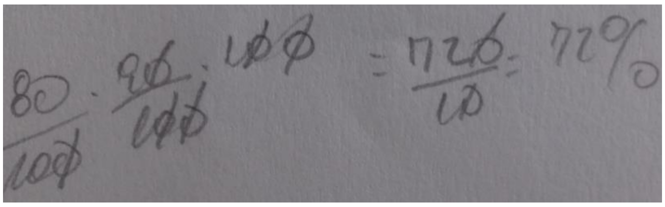
2^a opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.

3^a opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

Escolhendo a 2^a opção, a probabilidade de o apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é igual a:

(A) 90%. (B) 81%. (C) 72%. (D) 70%. (E) 65%.

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada, atentando para os conectivos envolvidos e as frações complementares, com o correto uso do cancelamento.

Nossa Opção para Resolução:

Comentário: Atentar para as frações complementares. Exemplo: Se ganhar representa 2/10, perder será representado pela fração que falta para o inteiro: 8/10. Igual raciocínio para os decimais e as porcentagens.

Ganhar: $2^a) \rightarrow \frac{2}{10}.\frac{1}{10} \rightarrow \frac{2}{100} = 2\%$ Não ganhar: $2^a) \rightarrow \frac{8}{10}.\frac{9}{10} \rightarrow \frac{72}{100} = 72\%$

Situação 4

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Probabilidades com eventos independentes

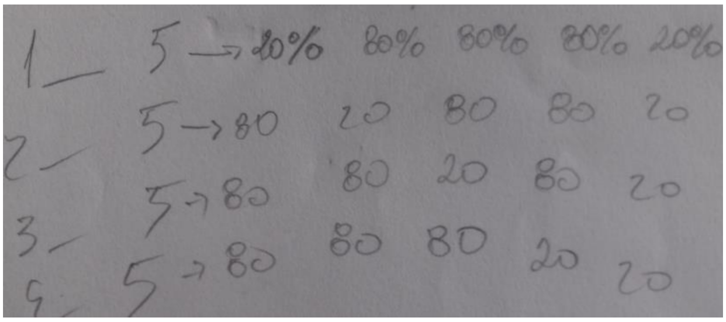
Conhecimentos prévios: Conectivo E/OU (Lógica) – Fração e percentual complementar – Decimais – Porcentagens.

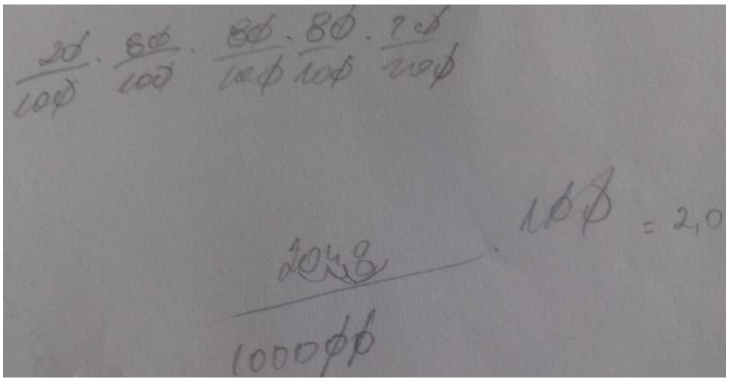
(ENEM, 2014) (Adaptada), O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

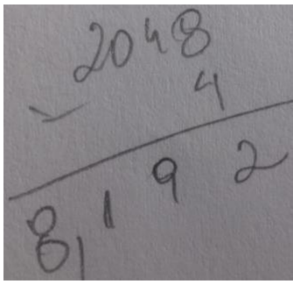
A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

A) 2,05%. B) 8,19%. C) 24%. D) 40,96%. E) 49,15%.

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:







Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada, atentando para os conectivos envolvidos, com o correto uso do cancelamento.

Nossa Opção para Resolução:

Para terminar com resposta errada na quinta pergunta e já tendo ocorrido uma resposta errada, temos as seguintes possibilidades:

E A A A E
ou
A E A A E
Ou **E = erro (20%) A = acerto (80%)**
A A E A E
ou
A A A E E

Segundo o enunciado, a probabilidade do erro é de 20%, logo a do acerto é de 80%

P = 4 . (0,2 . 0,8 . 0,8 . 0,8 . 0,2) → P = 0,08192 ou 8,19 %

Situação 5

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

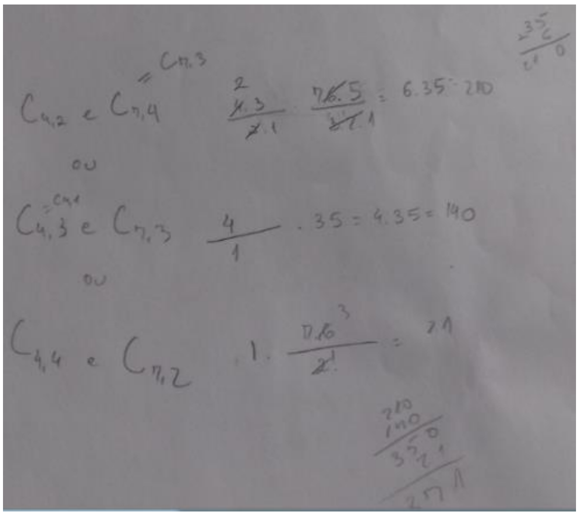
Tema: Análise combinatória - Combinação

Conhecimentos prévios: Conectivo E/OU (Lógica) – Fração – Divisibilidade – Cancelamento.

(ESAF, 2005), Um grupo de dança folclórica formado por sete meninos e quatro meninas foi convidado a realizar apresentações de dança no exterior. Contudo, o grupo dispõe de recursos para custear as passagens de apenas seis dessas crianças. Sabendo-se que nas apresentações do programa de danças devem participar *pelo menos* duas meninas, o número de diferentes maneiras que as seis crianças podem ser escolhidas é igual a:

a) 286 d) 371 b) 756 e) 752 c) 468

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada aos conectivos envolvidos, com o correto uso do cancelamento. Observem que o aluno JM ainda se encontra finalizando o 1º ano do EM.

Nossa Opção para Resolução:

"*pelo menos*" implica que podem participar 2, 3 ou 4 meninas.

Participando 2 meninas, temos por combinação: $C_{4,2}\ e\ C_{7,4} \rightarrow \frac{4x3}{2x1}.\frac{7x6x5x4}{4x3x2x1} \rightarrow 6x35 = 210$

Ou,

Participando 3 meninas, temos por combinação: $C_{4,3}\ e\ C_{7,3} \rightarrow \frac{4x3x2}{3x2x1}.\frac{7x6x5}{3x2x1} \rightarrow 4x35 = 140$

Ou,

Participando 4 meninas, temos por combinação: $C_{4,4}\ e\ C_{7,2} \rightarrow \frac{4x3x2x1}{4x3x2x1}.\frac{7x6}{2x1} \rightarrow 1x21 = 21$

O conectivo "**OU**" indica operação de reunião, união ou adição dos subgrupos envolvidos.

Então, **210** + **140** + **21** = **371** opções para as composições das equipes sugeridas.

Situação 6

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

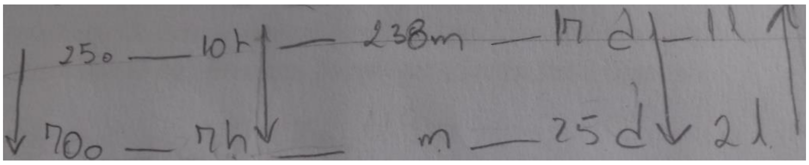
Tema: Grandezas proporcionais: Regras de 3

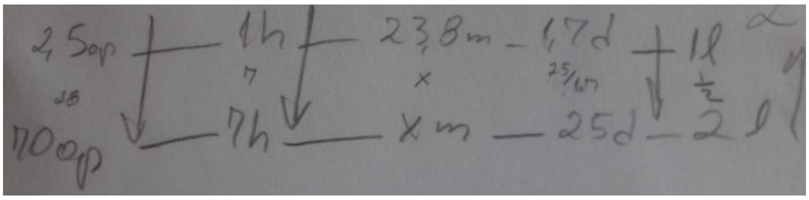
Conhecimentos prévios: Fração – Divisibilidade – Cancelamento.

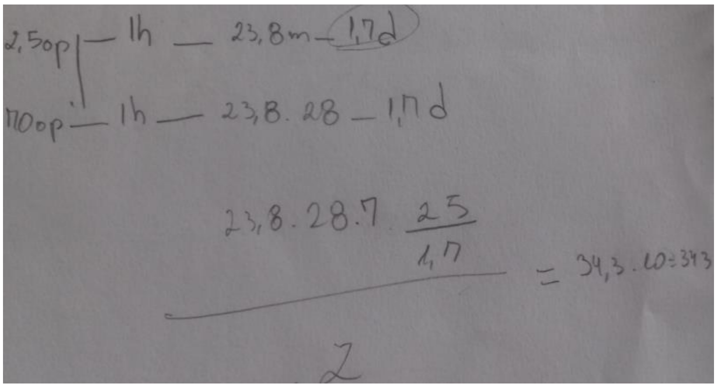
(EEAR, 1996), 25 operários, trabalhando 10 horas por dia, abriram 238 m de um canal em 17 dias. Quantos metros de um canal, com o dobro da largura do primeiro, serão abertos por 70 operários, trabalhando 7 horas por dia, durante 25 dias?

(A) 158 (B) 343 (C) 686 (D) 700

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:







Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno JM, após concluir que as grandezas envolvidas eram diretamente e inversamente proporcionais, atingiu a resposta executando os cálculos em uma só fase, após ter incorporado de forma inovadora, uma razão de proporcionalidade entre elas, o que dispensou o uso do cancelamento. Observem que JM, inicialmente dividiu toda a linha do numerador por 10 e ao final multiplicou o resultado por esse mesmo 10.

Nossa Opção para Resolução:

Observem que a largura inicial era 100% e agora passou para 200%, sendo essa, a única grandeza inversamente proporcional.

$$\overline{Op}\ \frac{25}{70}=\overline{h/d}\ \frac{10}{7}=\overline{c}\ \frac{238}{x}=\overline{l}\ \frac{1}{2}=\overline{dias}\ \frac{17}{25}\rightarrow\frac{14.17}{x}=\frac{5.5}{7.2.5}.\frac{2.5}{7}.\frac{2}{1}.\frac{17}{5.5}$$

$$\frac{14.17}{x}=\frac{1}{7}.\frac{1}{7}.\frac{2}{1}.\frac{17}{1}\rightarrow\frac{14.17}{x}=\frac{2}{1}.\frac{17}{14}\rightarrow\frac{2.7}{x}=\frac{2}{49}\rightarrow x=7.49\rightarrow x=343m$$

Situação 7

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Grandezas proporcionais: Distribuição de capitais.

Conhecimentos prévios: Fração – Divisibilidade – Cancelamento – Igualdade entre razões.

---

07. (FUNCAB/PMM, 2011), Num bolão, cinco amigos ganharam quarenta e oito milhões de reais. O prêmio foi dividido em 5 partes proporcionais. Cada um recebeu, em reais, proporcionalmente ao valor investido por ele na compra do bilhete premiado. O valor do bilhete foi dividido em cotas iguais e cada um comprou certa quantidade, de acordo com a tabela abaixo.

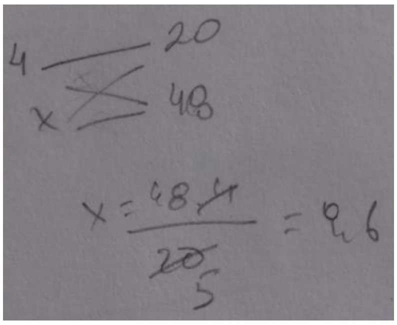
Nome	Número de Cotas
Luís	2
Marcos	3
Paulo	4
Pedro	5
Thiago	6

De acordo com a tabela apresentada, o valor do prêmio desse bolão recebido por Paulo foi:

a) R$ 9.600.000 b) R$ 12.000.000 c) R$ 19.200.000

d) R$ 22.000.000 e) R$ 2.400.000

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno JM concluiu de forma inovadora, que as grandezas envolvidas eram diretamente proporcionais, atingindo a resposta executando os cálculos em uma só fase, com o correto uso do cancelamento.

Nossa Opção para Resolução:

- O todo: 48.000.000 Fatorado: 48 x 1.000.000
- A soma das partes: 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 Fatorado: 2 x 10

- A divisão do todo pela soma das partes: $\frac{48x1.000.000}{2x10} \rightarrow \frac{24x100.000}{1} = 2.400.000$

Respondendo à pergunta: Paulo recebeu 4 cotas → 4 x 2.400.000 = 9.600.000

Situação 8

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Grandezas proporcionais: Regras de 3

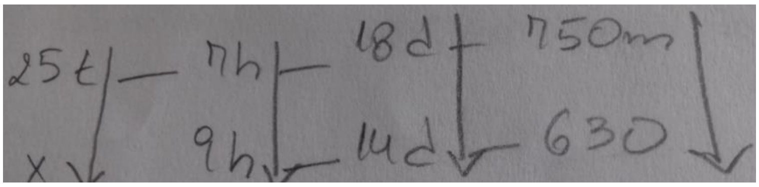
Conhecimentos prévios: Fração – Divisibilidade – Cancelamento – Igualdade entre razões.

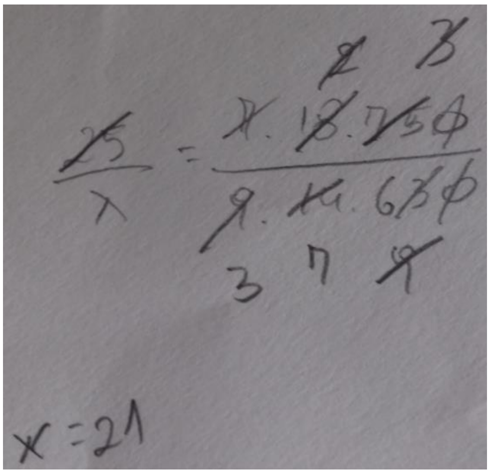
08. (CMM/EM, 2010), Vinte e cinco tecelões, trabalhando 7 horas por dia, durante 18 dias, fizeram 750 metros de certo tecido. Quantos tecelões trabalhando 9 horas por dia, durante 14 dias, seriam necessários para fazer 630 metros do mesmo tecido?

A) 20 tecelões   *B*) 21 tecelões   C) 22 tecelões   D) 23 tecelões

E) 24 tecelões

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:





Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno JM, após concluir que as grandezas envolvidas eram diretamente proporcionais, atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada em uma só fase, com o correto uso do cancelamento.

Nossa Opção para Resolução:

$$\frac{25}{x}=\frac{7.18.750}{9.14.630}\rightarrow\frac{25}{x}=\frac{7.2.9.3.25.10}{9.2.7.63.10}\rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1.1.1}{21}\rightarrow x=21$$

Situação 9

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Tema: Conjuntos

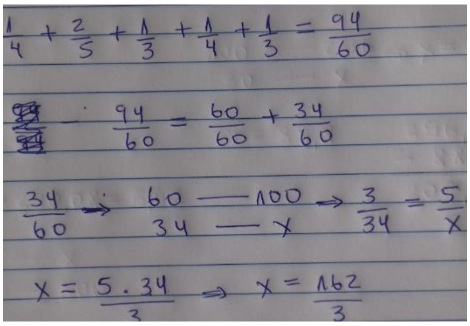
Conhecimentos prévios: Fração – Porcentagens - Divisibilidade – Cancelamento – União entre conjuntos – Igualdade entre razões.

09. (ESAF, 2009), Em um determinado curso de pós-graduaçao, ¼ dos participantes são graduados em matemática, 2/5 dos participantes são graduados em geologia, 1/3 dos participantes são graduados em economia, ¼ dos participantes são graduados em biologia e 1/3 dos participantes são graduados em química.

Sabe-se que não há participantes com três ou mais graduações. Assim, qual é o número mais próximo da porcentagem de participantes com duas graduações?

a) 25% b) 33% c) 40% d) 50% e) 57%

Resolução do aluno GFN - 2º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Nessa situação ocorreu um erro construtivo, segundo Davis e Espósito (1990). Na fase posterior à sondagem, o aluno não atingiu o modelo de resposta desejada, mesmo tendo executado cálculos coerentes, porém concordamos que a sua finalização deva ser considerada como correta, pois, caso tivesse prosseguido na divisão, teria atingido a resposta em percentual. Além disso fez uso do cancelamento quando da igualdade entre as razões envolvidas.

Nossa Opção para Resolução:

U = M + G + E + B + Q – X
100% = 25% + 40% + 33,33% + 25% + 33,33% - X
X = 100 – 156,66... X ≅ 57%

Atenção!

Denominamos de X o conjunto daqueles participantes que faziam duas pós-graduações por não sabermos quais eram.

Situação 10

Público alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

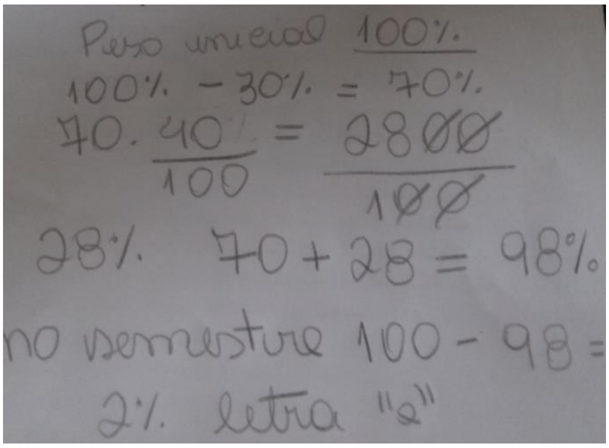
Tema: Porcentagens

Conhecimentos prévios: Fração – Divisibilidade – Cancelamento – Porcentagens.

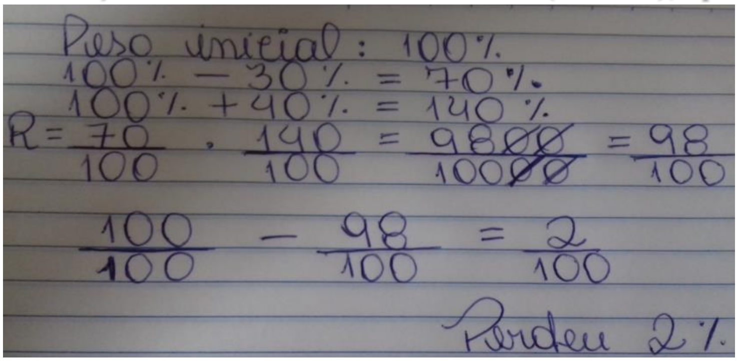
10 (CN) (Adaptada), Uma senhora extremamente gorda pesava 296 kg. Tendo resolvido fazer uma dieta forçada no primeiro semestre, perdeu em três meses 30% de seu peso; entretanto, nos três meses seguintes, dada as guloseimas juninas, ela aumentou seu peso em 40%. No decorrer desse semestre, o peso da senhora:

a) aumentou 16% b) aumentou 10% c) manteve seu valor inicial
d) diminuiu 10% e) diminuiu 2%

Resolução da aluna NGSB - 2º ano EM (Pública), durante teste de sondagem:



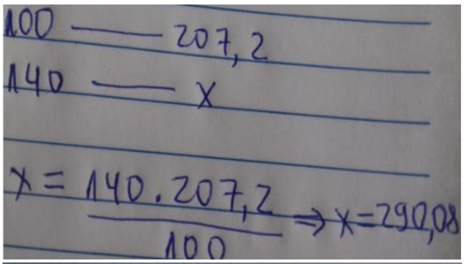
Resolução da aluna NGSB - 2º ano EM (Pública), após teste de sondagem:

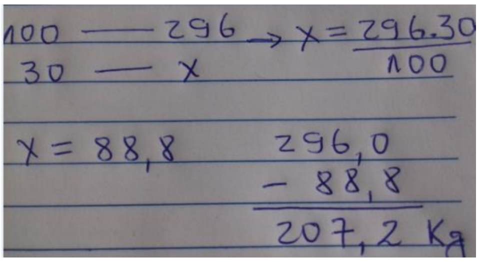


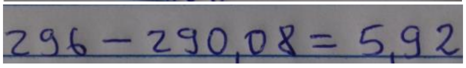
Análise das respostas:

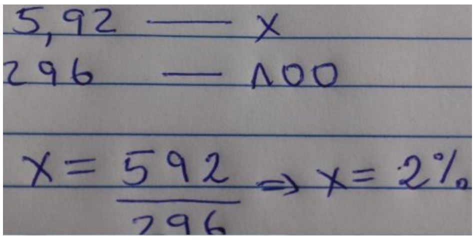
Na fase de sondagem, a aluna atingiu a resposta executando os cálculos em quatro fases distintas, podendo ter errado na conclusão da resposta. Na fase posterior à sondagem, seguiu uma sequência lógica na execução dos cálculos, já fazendo tímido uso do cancelamento. Ainda há insegurança na relação entre as frações, os decimais e as porcentagens.

Resolução do aluno GFN - 2º ano EM (Pública), após teste de sondagem:





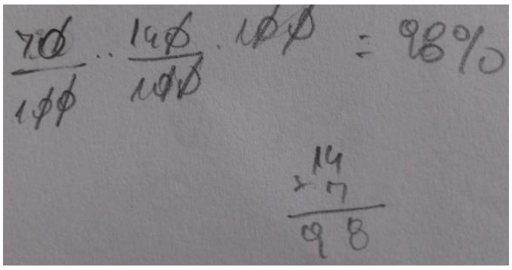




Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando exaustivos cálculos em quatro fases distintas, podendo ter errado na conclusão da resposta face a magnitude dos valores envolvidos nas operações de divisão. Mesmo tendo seguido uma sequência lógica na execução dos cálculos, não fez uso do cancelamento.

Resolução do aluno JM - 1º ano EM (Pública), após teste de sondagem:



Análise da resposta:

Na fase posterior à sondagem, o aluno atingiu a resposta executando os cálculos de forma adequada em uma só fase, com o correto uso do cancelamento.

As nossas possíveis formas de resoluções:

Trata-se de sobreposição de taxas sucessivas em momentos distintos. Observar que a porcentagem, por ser temporal, a cada aplicação ela se comporta como se 100% fosse. Então, emagrecendo 30% irão sobrar 70%. Engordando 40% irão resultar em 140%. Os leitores desavisados afirmaram categoricamente que ocorrerá um aumento de 10% no período o que é um lamentável equívoco.

Para resolução desta questão, precisamos deter conhecimentos prévios sobre **acréscimos** e **decréscimos** percentuais, transformações entre fração, decimal e porcentagem, multiplicação entre frações (usando sempre o cancelamento com base nas regras de divisibilidade) ou entre decimais e divisão por potências de base decimal.

(Opção1 - Recomendada)

Por Frações: $\frac{70}{100}.\frac{140}{100} \to \frac{7}{10}.\frac{14}{10} \to \frac{98}{100} = 98\%$ → 100% – 98% = 2%

(Opção2 – Pouco recomendada)

Por Decimais: 0,7 x 1,4 = 0,98 → 100% – 98% = 2%

(Opção3 – Não Recomendada)

Pelo cálculo direto com base em um "Cem" qualquer:

✓ 70% de 100 = 70

✓ 140% de 70 = $\frac{140}{100}.70 \to \frac{14}{10}.70 \to \frac{14}{1}.7 = 98$ → 100% – 98% = 2%

1.1 – Conclusões das análises dos resultados avaliados:

> De forma generalizada, o erro ocorre pela ausência total ou parcial dos conhecimentos prévios necessários à formulação de um novo conceito (LIMA, ARAÚJO, ALBUQUERQUE, 2000).

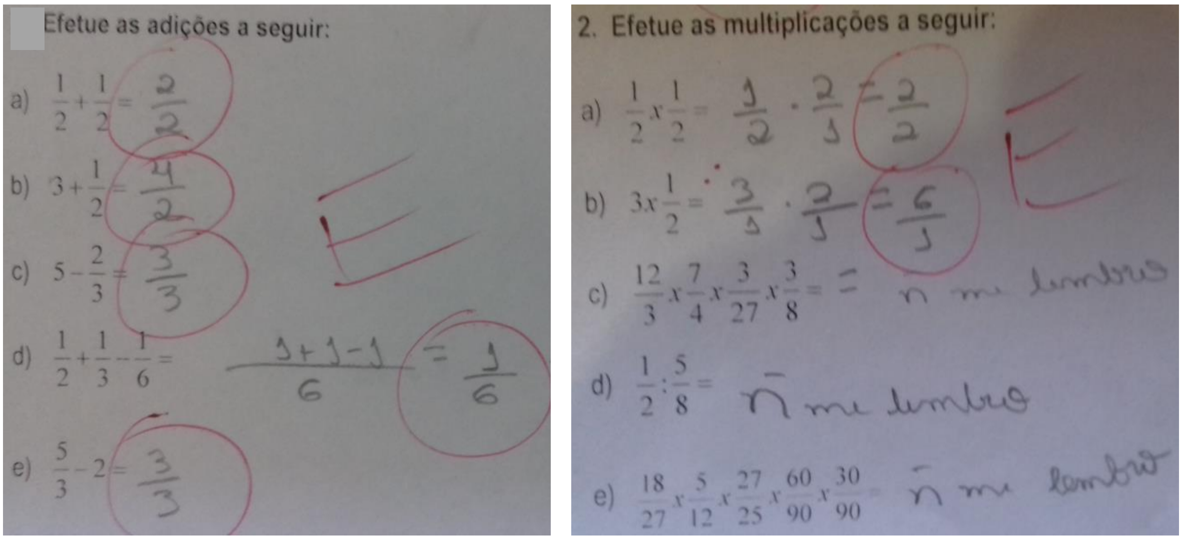
Concordamos plenamente com os teóricos citados, mas acrescentaríamos, como forma de complementação às conclusões dessas autoras, que o erro também pode ocorrer por excesso de procedimentos na execução do cálculo. Por exemplo, o caso das *probabilidades* (2º ano do Ensino Médio): a formulação do conceito sobre *probabilidades* dependeu de um vasto campo conceitual, sendo as *frações*, os *decimais* e as *porcentagens*, não necessariamente nesta ordem, mas, correlacionados entre si, os principais personagens para obtenção de êxito nesse tópico matemático. Como conhecimentos prévios indiretos ainda poderíamos considerar os critérios sobre *divisibilidades para fazer uso conveniente do cancelamento*, o que evitaria a execução de exaustivos cálculos, logo, minimizando a possibilidade da ocorrência do erro. De modo similar, essas necessidades também foram observadas na formação conceitual sobre os tópicos referente as grandezas proporcionais e as combinações. Portanto, tentar "recuperar" os conceitos dos tópicos sobre Probabilidade, Proporções e Combinações, entre outros, através de avaliações, por exemplo, sem atentar para os déficits do campo conceitual correlacionado e das ferramentas adequadas para execução dos cálculos, certamente não iria promover mudança significativa nos resultados anteriormente obtidos, podendo ainda reforçar o erro na obtenção desses conceitos.

2 – Retomada dos Conceitos Prévios com Aulas Expositivas

Ações anteriores à aula para retomada dos conceitos:

- Levantamento dos erros de cálculo cometidos nas avaliações anteriores;
- Identificação dos conhecimentos prévios não apreendidos necessários à formação dos novos conceitos;
- Aplicação de teste de sondagem para avaliar os conhecimentos prévios. (Apêndices A, B e C)

Figura 1 - Alunos em aulas para retomada de conceitos



Resolução do teste de sondagem aplicado a aluna SBMT, 2º ano EM (Pública) sobre operações com frações. (Apêndice B)

- Análise qualitativa do erro cometido.

Ações durante a aula para retomada dos conceitos:

- Enfatizar o tópico matemático a ser trabalhado e se possível apresentar exemplos de sua futura aplicabilidade nas áreas afins do conhecimento ou no cotidiano;
- Reapresentação dos tópicos para reformulação dos conceitos prévios, dissociando-os do rigor conceitual que o tema requereu à época de sua inicialização;
- Apresentação de opções diversas de resolução “macetes” para a obtenção de resultados favoráveis;
- Teste de verificação imediata e individual, concomitante ao tópico trabalhado, para ratificação do conceito e identificação dos alunos que possam atuar como monitores, caso seja necessário;
- Rediscussão e resolução do modelo apresentado como teste;
- Novos testes com diversificações do modelo matemático trabalhado para verificar a assimilação do conceito principal e o trato com os campos conceituais coadjuvantes (podendo fazer uso do aluno monitor);
- Promover discursão para obter retorno de verbalização e mensurar o grau de segurança do aluno;

- Analisar o discurso do aluno, retificando ou ratificando o que foi exposto, tendo a precaução de não deixar perguntas, verbalizadas ou não, sem as devidas respostas;
- Avaliar os componentes da turma na perspectiva da avaliação formativa;

> (...) A avaliação formativa participa da renovação global da pedagogia, da mutação da profissão do professor: outrora dispensador de aulas e de lições, o professor se torna o criador de situações de aprendizagem portadoras de sentido e de regulação. A avaliação formativa incorpora a dimensão de como cada sujeito se apropria dos conhecimentos para si, para sua comunidade e para a sociedade, dando relevância ao valor do conhecer e da competência de jovens e adultos para a elaboração de novos conhecimentos. (*PERRENOUD, P. (1999)*

- Apresentar lista de atividades para resolução em domicílio.

Ações após a aula para retomada dos conceitos:

Reavaliação e readaptação da metodologia aplicada; Relacionar as alterações a serem implementadas nas aulas seguintes; Avaliar a partir do segundo encontro, o compromisso e o desempenho do aluno quanto a resolução da lista de atividades, cuja execução não tem o objetivo de mensuração de nota, mas apenas obter retorno que possam subsidiar as ações metodológicas em curso. Na (Figura 02), um aluno expondo na lousa o que reaprendera sobre as proporções.

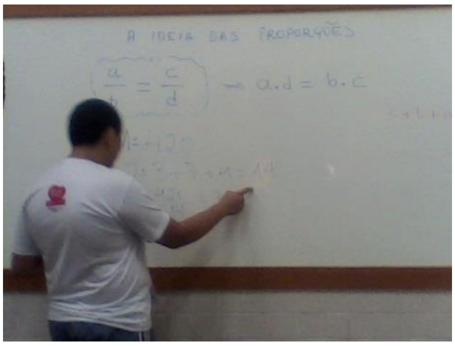


Figura 2

> A avaliação tem por objetivo auxiliar o educando no seu crescimento e integração consigo mesmo como sujeito existencial e como cidadão, ademais de ajudá-lo na apropriação dos conteúdos propostos. O diagnóstico da avaliação permite a tomada de decisão mais adequada, tendo em vista o autodesenvolvimento e o auxílio externo para este processo: “para não ser autoritária e conservadora, a avaliação tem a tarefa de ser diagnóstica, ou seja, deverá ser o instrumento dialético do avanço, terá de ser o instrumento da identificação de novos rumos” (LUCKESI, 2000, p. 43)

2.1 - Análise dos Resultados:

Nas avaliações pós sondagem ficou evidenciado nas resoluções de cálculo, que os procedimentos adquiridos nas aulas para retomada de conceitos não apreendidos tiveram significativo aproveitamento, pois fora possível observar a capacidade de verbalização sobre a aplicação de determinada técnica reaprendida naqueles momentos;

Adoção do modelo aplicado: PARCIALMENTE INDICADO.

Justificativa: Claro que muito do que foi trabalhado nesses encontros teve significativo aproveitamento posterior, mas não atingiu a grande massa. Faltou ao projeto ingredientes que alavancassem o entusiasmo das turmas, o que não aconteceu.

3 - Como Lidar com os Racionais – Uma Experiência Vivenciada em Ambiente de Estágio

Fase I – Debate coletivo sobre a ideia de percentuais.

A partir de um percentual, por exemplo: **20%** (vinte por cento), o professor passaria a questionar a sua utilização no cotidiano em situações de crescimento (reajuste, acréscimo, majoração, aumento, inflação, lucro) ou de decrescimento (desconto, decréscimo, abatimento, prejuízo, deflação) de forma a envolver o grupo no debate. Exemplo: Na loja T, um anúncio para a venda de um celular acusou um aumento de 20% em relação ao mês anterior. Quanto esse aparelho custava, em percentual, antes do aumento? 100% seria a resposta.

Trabalhar a ideia de crescimento e decrescimento como sendo **sempre** a adição ou a subtração, respectivamente, a 100% do percentual que se deseja aumentar ou diminuir: Aumentou 20% a que? Diminuiu 20% a que? Enfatizando que essa variação percentual ocorre sempre em relação ao percentual 100% e independe de valor numérico a ele atribuído. No caso do celular, não importa o valor que o aparelho fora anunciado anteriormente e sim os 100% que esse valor representava.

No caso da aquisição do celular, o professor ainda poderia criar uma situação hipotética em que determinado aluno ao decidir adquirir o aparelho, tenha obtido do vendedor um desconto de 20% para pagamento em dinheiro. Em termos percentuais, quanto esse aluno pagaria? 80% seria a resposta. Mas ao dirigir-se ao caixa, deparou-se com o gerente, seu amigo do bairro, que lhe ofertou mais um desconto de 10%. Nessa ocasião, quanto seria pago pelo aparelho? 90% seria a resposta. Ao finalizar a compra esse aluno teria pago, em percentual, que valor? 90% de 80%, ou seja, o aluno pagou 72% do valor inicialmente anunciado, tendo obtido um desconto total de 28%.

Mas, caso o professor sinta a necessidade de trabalhar a ideia de porcentagem atrelada a um valor, poderíamos criar uma situação hipotética para clarear melhor o conceito apresentado. Supondo que o aparelho custasse R$ 1000,00, no primeiro desconto de 20% o aparelho passaria a custar R$ 1000,00 - R$ 200,00 = R$ 800,00. Um segundo desconto de 10%, o aparelho passaria a custar R$ 800,00 - R$ 80,00 = R$ 720,00. Observem que no primeiro desconto o nosso 100% era R$ 1000,00 e no segundo, R$ 800,00, ou seja, o nosso 100% refere-se **sempre** ao momento do acréscimo ou do decréscimo e independe das variações percentuais anteriores.

Uma situação clássica para incitarmos a curiosidade do aluno é a seguinte: Uma senhora extremamente obesa, preocupada com seus 392 kg de massa corpórea, submete-se a uma rigorosa dieta durante seis meses contínuos. No primeiro trimestre consegue perder 30% de seu peso, mas no trimestre seguinte, ganha 30% de peso. A reação imediata dos alunos é tentarem calcular os percentuais sobre os 392 Kg, dificultando a obtenção da resposta. Muitos outros afirmariam que no final daquele semestre não havia ocorrido nenhuma alteração na massa corpórea da jovem senhora, pois perdera e ganhara igual quantidade de massa. Pois bem, ignorando os 392 kg, bastaria imaginar que a senhora ao perder 30% de peso ficara com 70% e ao ganhar 30%, ficara com 130% de peso, resultando em 130% de 70% o que nos dá como resultado final 91%, ou seja, ocorrera uma perda de 9% na massa corpórea inicial.

Ainda seria oportuno a apresentação de artifícios de cálculos para se determinar percentuais. No exemplo anterior, calculamos 20% de R$ 1000,00 como sendo igual a R$ 200,00. Vejamos, por decomposição do percentual, 20% = 10% + 10%. Então, para Calcularmos 10% de R$ 1000 basta “retirarmos” um zero de 1000, pois 10% significam a décima parte de 1000 ou 1/10 de 1000 logo, 10% de 1000 = 100. Como 20% = 10% + 10%, 20% de 1000 = 100 + 100, R$ 200,00.

No segundo caso, para calcularmos 10% de 1200 basta “retirarmos” um zero de 1200, R$ 120,00.

Como ficaria se caso quiséssemos 15% de 1200?

Como 15% = 10% + 5% (a metade de 10%) obteríamos 120 + 60 (metade de 120) = 180,00.

Fase II – Crescimento e Decrescimentos Percentuais: Sua relação com as frações e os decimais

Nessa fase, passaríamos a trabalhar os conceitos de **crescimento** e **decrescimento** percentual e suas relações com as frações e com os decimais, nessa ordem (Barbosa, (1986)), sempre fazendo uso de referenciais do conhecimento do aluno:

1. Supondo a ocorrência de um crescimento percentual de 20% (reajuste, acréscimo, majoração, aumento, inflação, lucro):

a) Em porcentagens: 100% + 20% = 120%

b) Em frações, enfatizando as operações aditivas: $\frac{100}{100}+\frac{20}{100}=\frac{120}{100}$

Atentar para o fato de que, ao dividirmos um percentual por 100 promovemos a migração desse percentual para uma fração ou para um decimal.

b.1) Simplificando as frações

$1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ (Fração imprópria, maior que um)

Ou ainda

$\frac{5}{5}+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$ (Fração imprópria, maior que um)

c) Em decimais, enfatizando a leitura e a operação aditiva com vírgula: 1,00 + 0,20 = 1,20

d. Promover debate entre o grupo para verificar o nível de assimilação dos conceitos prévios que se pretendeu ensinar, ou seja, as relações entre porcentagens, frações e decimais:

$100\%=\frac{100}{100}=1,00=\frac{5}{5}$ $\quad +20\%=\frac{20}{100}=0,20=\frac{1}{5}$ $\quad =120\%=\frac{120}{100}=1,20=\frac{6}{5}$

e) Enfatizar que o decimal com a parte inteira diferente de zero indica aumento percentual. Exemplo: 1,2 (Um inteiro e dois décimos). Nesse caso questionaríamos o que se acrescentou ao inteiro.

Decompondo-o teremos: 1 + 0,2 = 1,2 ou 100% + 20% = 120%, então esse decimal indicaria a ocorrência de um aumento de 20%.

2. Supondo a ocorrência de um decrescimento percentual de 20% (desconto, decréscimo, abatimento, prejuízo, deflação)

a) Em porcentagens: 100% **–** **20%** = 80%

b) Em frações, enfatizando as operações subtrativas: $\frac{100}{100} - \frac{20}{100} = \frac{80}{100}$

b.1) Simplificando as frações

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (Fração própria, menor que um)

ou ainda

$\frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ (Fração própria, menor que um)

c) Em decimais, enfatizando a leitura e a operação subtrativa com vírgula: 1,0 **–** 0,2 = 0,8

d) Promover debate entre o grupo para verificar o nível de assimilação dos conceitos que se pretendeu ensinar, ou seja, as relações entre porcentagens, frações e decimais:

$100\% = \frac{100}{100} = 1{,}00 = \frac{5}{5}$ $\quad -20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20 = \frac{1}{5}$ $\quad = 80\% = \frac{80}{100} = 0{,}80 = \frac{4}{5}$

e) Enfatizar que o decimal com a parte inteira igual a zero indica diminuição percentual. Exemplo: 0,8 (oito décimos). Nesse caso questionaríamos o que falta para obtermos o inteiro.

Decompondo-o teremos: 1 - 0,8 = 0,2 ou 100% - 80% = 20%, então esse decimal indicaria a ocorrência de um desconto de 20%.

Fase III – Como migrar da fração ou do decimal para a porcentagem.

Devemos enfatizar que, a partir de qualquer fração ou decimal, poderíamos ter suas representações em porcentagem, bastando multiplicá-los por 100. Portanto, essa deve ser uma escolha do aluno na execução dos cálculos desses racionais, ou seja, operações fracionárias ou decimais podem ser realizadas por representações percentuais sem que haja prejuízo no resultado final. Vejamos:

Exemplos$_1$:

2/5 representam quantos por cento? $\frac{2}{\cancel{5}_{1}} \cdot \cancel{100}^{20} = 2x20 = 40\%$.

No exemplo 1, enfatizar o recurso do cancelamento na multiplicação entre frações utilizando-se dos critérios sobre divisibilidades.

Exemplos$_2$:

1,25 representam quantos por cento? 1,25 x 100 → 125%

Exemplos$_3$:

0,05 representam quantos por cento? 0,05 x 100 → 5%

Nos exemplos 2 e 3, enfatizar o recurso do deslocamento da vírgula à direita, em decimais, quando ocorrer a multiplicação por potências de base 10, a saber: por 10, 100, 1000, etc.

A finalização do processo se dá com a análise dos resultados obtidos para ratificação ou readaptação dos procedimentos para a retomada dos conhecimentos prévios.

4 – Retomada dos Conceitos Prévios com atividades coletivas

Após as retomadas dos conceitos prévios com aulas expositivas, alguns alunos pareciam assimilar com maior facilidade o que se esperava sobre a formação do conceito de probabilidade, por exemplo, quando apresentávamos situações em que a probabilidade de ocorrerem eventos independentes, em determinado universo, por duas interferências distintas, gritavam: é a probabilidade de ocorrer o primeiro multiplicada pela probabilidade de ocorrer o segundo. Perfeito, é isso mesmo! Mas, quando era necessário representar o resultado em razões percentuais, por exemplo, havia serias dificuldades na finalização da resolução.

Esse mesmo cenário se propagou para as situações em que o enunciado exigia o complementar do racional obtido, como por exemplo, a probabilidade de acerto sendo de 20%, qual seria a probabilidade do erro ocorrer. O que fazer? Havia sido ofertado os conhecimentos prévios necessários para que esses alunos lidassem com essas situações, mas não conseguiam avançar de forma positiva nas situações problemas que lhes eram apresentados. Após troca de ideias com a jovem professora Eva Rocha, titular da disciplina matemática para o ensino médio, nos Colégios Brasileiro Pedro Silvestre (Estadual) e Palas Atena (Privado), percebemos que seria viável repassar para aqueles alunos a responsabilidade de apresentarem por conta própria os conceitos referentes aos diversos tópicos matemáticos trabalhados à época, já que dispunham dos conhecimentos prévios necessários. Essa ideia foi apresentada no período de estágio, ao professor orientador-campo que, de antemão, solicitou um projeto para execução desse modelo de atividade. Bom, o projeto não foi apresentado em tempo, pois já havia em curso a realização de mini seminários para apresentação na III Mostra de BIOEXATAS(3) promovida pelo colégio Ruy Araújo, situação em que cada turma fora dividida em número de equipes suficiente para as apresentações dos conteúdos sobre as seguintes temáticas:

- Contextualização dos sistemas lineares, a cargo do 2º ano 03;
- Criptografia de mensagens com matrizes, a cargo do 2º ano 05;
- O Lúdico e a Matemática: Torre de Hanói, a cargo do 2º ano 01 e
- As Trilhas, a cargo do 2º ano 02.

Então, passamos a analisar o desenvolvimento das duas primeiras equipes na construção dos conceitos necessários à defesa dos temas propostos, pois aquelas situações atendiam de imediato aos nossos propósitos de pesquisa, afinal tratavam-se de atividades envolvendo a matemática básica:

A primeira, defendendo o tema: *A contextualização dos sistemas lineares*, apresentada pela equipe do 2º ano 3, surpreendeu a todos pelo domínio do conteúdo e pela forma descontraída como abordaram o tema, considerando que não fizeram uso de tecnologias nessa apresentação.

No entendimento unânime da assistência, o objetivo da equipe fora plenamente alcançado. Na finalização das falas, um dos componentes da equipe se aproveitou do contexto para cortejar a jovem líder da equipe, utilizando-se da aplicabilidade dos sistemas lineares como fundamentação matemática para a obtenção de resultados comprobatórios em suas intenções “amorosas”, fato que enriqueceu a compreensão do tema em debate.

---

(3) MOSTRA DE BIOEXATAS:
Evento promovido pelo Colégio Ruy Araújo em parceria com o PIBIC/IFAM, em Manaus-AM, com o objetivo de desenvolver o senso criativo dos alunos do Ensino Médio, nas áreas das ciências biológicas e exatas.

A segunda, com o tema: *A criptografia de mensagens com matrizes,* apresentada pela equipe do 2º ano 5, teve sua gênese no laboratório de informática (Figura 03), com o uso dos aplicativos Excel e PowerPoint como ferramentas complementares na execução e preparação das apresentações, sob orientação de um professor, pois visavam fazer uso desses aplicativos na apresentação.

Figura 03

Essa equipe também apresentou brilhante atuação sobre o tema proposto, pelo domínio de conteúdo, envolvimento na exposição e defesa do tema, tendo sido motivo de contínuos elogios por parte dos grupos que assistiram à demonstração, em especial o da professora Andreia Oliveira[(4)] que ao ser questionada sobre o que assistiu, desabafou: “muito bom, excelente apresentação”.

Além das redescobertas do conhecimento nessas oficinas, o evento fora abrilhantado com a participação maciça dos alunos, professores, pedagogos e gestão, além da visita dos ilustres professores do IFAM, entre os quais, evidenciamos os professores FRANCISCO e ANDREIA OLIVEIRA, ambos matemáticos, por serem coordenadores de projetos do IFAM vinculados à escola e nossos professores naquela instituição. Na foto (figura 04), esses visitantes apresentam-se sendo recepcionados pelo professor PEDRO IVAN, coordenador de duas das oficinas matemáticas e ex-aluno desses renomados mestres.

Figura 04

Bioexatas agita Ruy Araújo

A PALAVRA MÁGICA: OBRIGADO.

Intercom NORTE2015

COMUNICAÇÃO, CULTURA E CIDADE ESPETÁCULO

Figura 05

O sucesso do evento teve repercussão tanto interna quanto externa, pois um dos meios de comunicação impressa local (Figura 05) publicou significativa matéria enaltecendo o ocorrido, fato que abrilhantou ainda mais o evento.

[(4)] A professora **Andréia** Oliveira é mestra em Matemática e professora efetiva dos cursos superiores de graduação do IFAM. À época, participava da coordenação do PIBIC - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica, naquela instituição.

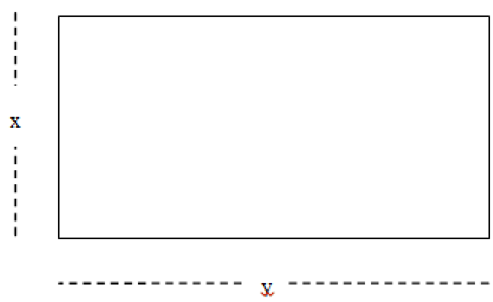
Com a finalidade de registrar no papel as emoções observadas naqueles personagens, referindo-nos aos atores principais, coadjuvantes e a plateia em geral, razão de ser do evento, fora solicitado uma entrevista com uma das personagens principais dessa plateia, a professora Andreia Oliveira, pois havíamos observado sua contemplação às oficinas visitadas, e assim poderíamos materializar parte daquelas emoções, mesmo sabendo que muitas outras seriam excluídas e que certamente se perderiam com o tempo no imaginário daqueles heroicos participantes. (Apêndice D).

No final do IV bimestre letivo, seguindo os moldes da III Mostra sobre Bio Exatas, fora proposto àquelas turmas a apresentação de tópicos sobre Geometria Espacial para obtenção de notas referente àquele bimestre, tendo sido apresentado resultados altamente significativos sobre os conceitos de volumes e áreas de prismas com suas bases poligonais regulares, mesmo dispondo de menor tempo para apresentação.

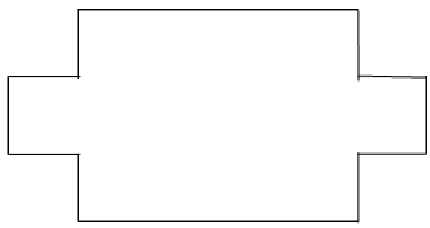
A seguir apresentamos os relatos de algumas das apresentações:

1. A equipe **A** ao defender a ideia de que "Dada uma superfície retangular plana, subtraindo-se uma dimensão qualquer das extremidades largura e altura que pudesse possibilitar a construção de uma caixa (paralelepípedo retangular), o perímetro desse sólido planificado não se alteraria em relação a superfície inicialmente disponível para a sua construção"

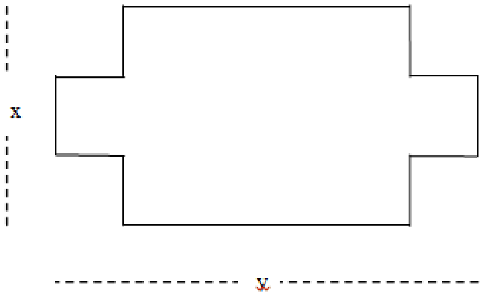
Material disponível: folha de dimensões x por y.



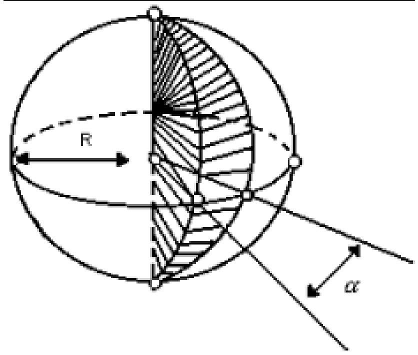
Cortes efetuados em suas dimensões



A equipe defendia que esses cortes não alteraram o perímetro original. Essa afirmação causou calorosa discursão entre os alunos que assistiam a apresentação, pois, em sua maioria, não concordavam com a ideia apresentada. Após intervenção do professor orientador, passaram a entender que as dimensões na realidade não foram subtraídas e sim transportadas nos sentidos verticais e horizontais em relação a figura original.



2. A equipe **B** ao defender a forma de como se obtinha o volume de uma cunha esférica ou a área de um fuso esférico, surpreendeu-nos com a ideia de se construir uma razão de proporcionalidade para obtenção desse ângulo dessa cunha ou do seu fuso. Nesses casos, defendeu muito bem uma aluna componente da equipe: “Não precisamos aplicar uma nova fórmula e sim utilizarmos aquelas que já conhecemos para obtenção dos devidos cálculos do volume da cunha ou da área do fuso.”



Exemplificando:

Sendo α um ângulo de 30º e R (raio da esfera) igual a 3u. Calcular o volume da cunha e a área do fuso, ambos formados pelo ângulo α.

Razão de proporcionalidade: $\frac{30}{360} \rightarrow \frac{1}{12}$

Volume da esfera:

$\frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \frac{4}{3}\pi 3.3.3 = 36\pi u^3$

Volume da cunha: $\frac{1}{12}$ $de\ 36\pi \rightarrow 3\pi\ u^3$

Área da esfera: $4\pi R^2 \rightarrow 4\pi 3.3 = 36\pi\ u^2$

Área do fuso: $\frac{1}{12}$ $de\ 36\pi \rightarrow 3\pi\ u^2$

Comentário sobre essa apresentação: Essa equipe surpreendeu a todos pela segurança na apresentação e inovação no domínio de conteúdo. Percebam que a sequência dada a resolução da questão somente faz quem tem pleno domínio sobre o tema. Primeiro a equipe definiu a razão de proporcionalidade que na continuidade das perguntas ia sendo utilizada a medida que se fazia necessário, ora no volume da cunha, ora na área do fuso.

4.1 - Análise dos Resultados

Adoção do modelo aplicado: PLENAMENTE INDICADO.

Justificativa: Nessa modalidade de abordagem do conhecimento, os alunos tendem a se envolverem com maior comprometimento na formulação dos conceitos matemáticos, recorrendo às inúmeras informações disponíveis na WEB, em vídeos ou textos e a seus professores. Tendo de enfrentarem os seus erros e certos de contarem com a adequada intervenção do professor, o aprendizado da matemática pareceu mais eficaz e prazeroso. Segundo Vygotsky (1988), o processo de construção do conhecimento ocorre em uma complexa dinâmica interativa, da qual participam três elementos essenciais: o aluno, como sujeito do conhecimento; os conteúdos e os significados; e o professor que atua como mediador.

O que se pode concluir com esse tipo de abordagem do conhecimento:

Primeiro, que esse modelo para a retomada dos conceitos prévios sobre racionais, sendo responsabilidade dos alunos, o aprendizado pode ser plenamente viável, assim como foi nas apresentações das Oficinas da III Mostra de BioExatas. É extremamente útil nesse processo, a orientação do professor para que se possa dar a segurança necessária aos componentes das equipes na defesa do que se propuserem a apresentar, assim como ocorreu na Amostra. Rezende (2006), ressalta que, nesse tipo de abordagem do conhecimento, o professor deve fazer uma explanação inicial dos conceitos em sua lógica e fundamentação, demonstrando como os conceitos se formaram desde sua origem até aquele momento, exemplificando situações de sua possível aplicação.

Segundo, deve-se orientar os alunos não participantes diretos a questionarem os alunos apresentadores sobre o tema exposto, promovendo inquietação entre eles, assim como ocorreu com a equipe **A** ao defender a ideia de que “Dada uma superfície retangular plana, subtraindo-se uma dimensão qualquer das extremidades largura e altura que pudesse possibilitar a construção de uma caixa (paralelepípedo retangular), o perímetro desse sólido planificado não se alteraria em relação a superfície inicialmente disponível para a sua construção". Esse fato deve ser entendido como indício de envolvimento positivo no processo, pois convictos de estarem certos em suas observações, tanto os alunos apresentadores quanto os alunos assistentes, obrigam-se a reorganizarem suas ideias para a acomodação de novos conceitos sobre o que até então tinham como certo e, portanto, culminando com a aprendizagem de ambas as partes. Segundo Alexandre Rezende, professor da Faculdade de Educação Física da Universidade de Brasília (UNB), no modelo de ensino formativo-conceitual, o ensino está estruturado para a aprendizagem através da prática, para a capacidade da descoberta, para aprender a aprender. O professor deve ser o incentivador da observação e desafiar o aluno a buscar respostas e explicações dos conceitos pertinentes. Nesse modelo, os resultados variam em função do potencial de cada aluno. O que se busca alcançar é que o aluno selecione referenciais concretos que o ajudem a tomar uma decisão consciente que direcione sua ação em uma situação-problema. Nos modelos tradicionais de ensino, mesmo o sucesso na aprendizagem tende a ser esquecido. O modelo formativo-conceitual permite ao aluno desenvolver um método de estudo que permita seguir os passos analíticos que o levaram a formular o conceito inicial. Nele o aluno aprende na prática, não só a fazer, mas a entender e depois conseguir explicar como e porquê de uma ou outra ação. Nesse modelo podemos alcançar níveis de desenvolvimento de funções mentais não atingidas pelos modelos tradicionais como exemplifica Rezende (2006):

> a) a consciência, capacidade de interpretar as relações entre cada uma das situações específicas e o seu contexto de ocorrência e b) a aplicação automática, capacidade de transferir a aprendizagem para outras situações equivalentes, que respondem da mesma maneira à aplicação dos conceitos referenciais fornecidos pela base orientadora da ação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante das fundamentações teóricas, das conclusões apresentadas por pesquisadores sobre o tema e das análises dos procedimentos, dos acertos e dos erros cometidos por alunos do 2º ano do Ensino Médio por ocasião das resoluções de questões sobre probabilidades, análise combinatória e Proporções, entre outros, concluímos sem a pretensão de finalizar o assunto, que é extremamente possível a utilização do erro como ferramenta didática da aprendizagem no ensino da matemática básica, pois **compreendendo** o processo desenvolvido pelo aluno durante a resolução de tarefas, desde exercícios de fixação até os cobrados em provas e trabalhos, torna-se razoável pensar que o erro do aluno deva incitar o professor a analisar sua origem e o seu significado, buscando estratégias que possam fazer com que o aluno passe a superá-lo, pois entendemos que o erro deva ser considerado pelo educador como parte integrante do processo dialético, podendo ser entendido como peça fundamental para que haja mudanças de estratégias e de metodologias facilitadoras no *estimulo* dos alunos a *persistirem* em suas descobertas. Tona-se necessária maior eficácia da ação pedagógica quanto à supervisão do modelo de avaliação adotado, minimizando a aplicação de avaliações somativas sem as devidas análises de seus pressupostos básicos.

Dos ensaios vivenciados para a retomada dos conceitos prévios, identificamos ser mais produtiva a ação de tornar os educandos atores principais pela busca desses conhecimentos, pois segundo Rezende (2006), no modelo de ensino formativo-conceitual, o ensino se encontra estruturado para a aprendizagem através da prática, para a capacidade da descoberta, para aprender a aprender. Em sua dissertação, afirma que o professor deve ser o incentivador da observação e desafiar o aluno a buscar respostas e explicações dos conceitos pertinentes. Nesse modelo formativo-conceitual, os resultados variam em função do potencial de cada aluno. O que se busca alcançar é que o aluno selecione referenciais concretos que o ajudem a tomar uma decisão consciente que direcione sua ação em uma situação-problema. Esse autor considera que nos modelos tradicionais de ensino, mesmo o sucesso na aprendizagem tende a ser esquecido: o aluno estuda apenas para a prova e não para a vida. O modelo formativo-conceitual permite ao aluno desenvolver um método de estudo que permita seguir os passos analíticos que o levaram a formular o conceito inicial. Nele o aluno aprende na prática, não só a fazer, mas a entender e depois conseguir explicar como e porquê de uma ou outra ação, podendo alcançar níveis de desenvolvimento de funções mentais não atingidas pelos modelos tradicionais.

Por outro lado, ao refletirmos sobre o erro escolar e, consequentemente, sobre o modelo de avaliação somativa, aplicada pela maioria dos educadores em matemática no final de um processo letivo, nos leva a criar novas hipóteses, entre tantas, limitar-nos-emos a seguinte: Estaria o recém graduado em Licenciatura em Matemática capacitado a utilizar o erro como ferramenta didática da aprendizagem? Ao buscarmos algumas possíveis respostas, também nos deparamos com novas perguntas ou com novos modos de organizar antigas questões.

Recomendamos que, após análise dos insucessos do aluno, o professor em parceria com a equipe pedagógica, deva identificar e promover a (re) apresentação dos elementos precursores do erro, tais como foram os conceitos de espaço e sub espaço relativos a uma amostra, concomitante aos conceitos de números fracionários e sua relação com os decimais e a porcentagem para a formação do conceito sobre probabilidades. Não fazê-lo significaria condenar o educando a adicionar mais uma componente negativa ao seu cabedal de conceitos não apreendidos.

Entendemos que a continuidade do desenvolvimento escolar se encontra diretamente relacionada a valorização na formação inicial do docente, pois essa formação não pode ser embasada apenas na racionalidade técnica, mas sim numa perspectiva que reconheça sua capacidade de decisão dentro de uma sala de aula, onde deverá estar capacitado a confrontar as ações cotidianas com as produções teóricas, para assim se identificar. Essas transformações na docência só terão efetivação se o professor ampliar sua consciência sobre a realidade dos processos formativos e na sua prática docente cotidiana.

Nas práticas teóricas, a consciência do formador no formando não tem uma participação essencial, limitando-se às transformações superficiais com possíveis aplicações utópicas, por desvirtuarem da realidade exigida pela sociedade capitalista. Caso houvesse esta consciência e que fosse intencional o desenvolvimento, possibilitaria interações e aprendizagens significativas. No entanto, lidar com este desenvolvimento para aplicação profissional na formação de um educador é lidar com a formação de um ser humano, no intuito de transformar a visão do mesmo em relação aos paradigmas concebidos para sua prática docente e para o modelo de sociedade que tenha idealizado.

A formação do docente nas licenciaturas e as necessidades educacionais da escola geralmente tendem a priorizar o já conhecido e o já feito, não dando a devida atenção às ampliações do campo de atuação do futuro profissional. Nesse modelo, o desfavorecimento dos fundamentos teóricos pode acarretar a perda da dimensão na formação desse futuro profissional, havendo significativo prejuízo para o graduando na valorização da sua autonomia intelectual, criativa e crítica.

Entretanto, entendemos que a valorização do docente, tanto na prática quanto na teoria, traria possibilidades de entusiasmo para que esse profissional pudesse dar continuidade à sua formação, pois, sendo capaz de questionar o conhecimento e suas regras arcaicas de aplicação e avaliação através de pesquisas e ações inovadoras, manteria a dinâmica do meio escolar envolvida num processo continuo de construção e reconstrução do saber.

Acreditamos ser necessário intervir na formação acadêmica dos professores de matemática, considerados como um dos atores principais do processo de ensino-aprendizagem, para que possamos no futuro atribuir valor positivo a essa incógnita e tornar rotina nas atividades desses novos profissionais, a avaliação contínua do erro.

REFERENCIAIS BIBLIOGRÁFICOS

ABRAHÃO, Maria Helena M.B. Avaliação e erro construtivo libertador: uma teoria prática includente em educação. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. Etnografia da Prática Escolar. Campinas, SP: Papirus, 1995. (Série Prática Pedagógica).

AQUINO, Julio G. Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997.

BARBOSA, Ruy Madsen. Matemática Magistério 1 e 2. Atual, 2ª ed. 1986. São Paulo;

BENINCÁ, Elli. O Senso Comum Pedagógico: Práxis e Resistência. Porto Alegre: UFRGS, 2002.

BLOON, Benjamin S., HASTING, J. Thomas, MADAUS,George F. *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Troquel, 1975. v.1.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática - Ensino Médio: 2º ano, São Paulo: Ática, 2005

DAVIS, C. ; ESPÓSITO, Y. L. Papel e função do erro na avaliação escolar. *Cadernos de Pesquisa*, n. 74, p. 71-75, 1990.

DEMO, Pedro. Ser Professor é cuidar para que o aluno aprenda. 2.ed. Porto Alegre, 2004.

ESTEBAN, Maria Teresa. O que sabe quem erra? Reflexões sobre a avaliação e o fracasso escolar. Rio de Janeiro: DP&A, 2001.

FERREIRA, Deila Magda. Projeto Pedagógico para o Ensino Fundamental. 2008 Disponível em: http://cidadeeducada.blogspot.com.br/p/projeto-para-reforco-escolar.html. Acessado em 12 Out 2016.

FREITAS, Luiz Carlos de. Crítica da Organização do Trabalho Pedagógico e da Didática. Campinas: Papirus, 1995.

IEZZI, Gelson. Matemática e Realidade: 6º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado – 6. Ed – São Paulo: Atual, 2009.

LIMA, Anna Paula Brito. ARAÚJO, Claudia R. de. ALBUQUERQUE, Eneri C. de. Aprendizagens de Conceitos: O Processo de Formação de Conceitos na Teoria de Vergnaud. Dpto de Educação, UFRPE, 2000.

LUCKESI, Cipriano C. Prática escolar: do erro como fonte de castigo ao erro como fonte de virtude. São Paulo: FDE, 1998.

_________, Avaliação da Aprendizagem Escolar: Estudo e Proposições. – 16. Ed. – São Paulo: Cortez, 2005.

MENDES, Ivan Figueira. Matemática para os Concursos de Admissão ao 6º ano dos Colégios Militares, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2010.

MACEDO, Lino de. Avaliação do Erro: Ponto de partida ou de chegada? In: MELO, Marcos Muniz, (Org). Avaliação na Educação. Pinhais: Editora Melo, 2007.

MOREIRA, M.A. Teorias de aprendizagem. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.

MORIN, Edgar. Os sete saberes necessários à educação do futuro. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EdgarMorin.pdf. Acessado em: 05 Nov 2016.

NOGARO, Arnaldo(1) e GRANELLA, Eliane(2). O Erro no Processo de Ensino e Aprendizagem (2004).

PERRENOUD, Philippe. Não mexam na minha avaliação! Para uma abordagem sistémica da mudança pedagógica. In: ESTRELA, Albano e NÓVOA, Antônio (Org.) *Avaliações em educação:* novas perspectivas. Porto: Porto Ed., 1993.

REZENDE, Alexandre. Professor da Faculdade de Educação Física da Universidade de Brasília (UNB). E-mail: rezende@unb.br, 2006. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-73302006000400007. Acessado em 12 Out 15.

ROSSO, Ademir J. A função formativa do erro. Espaço Pedagógico Passo Fundo, 1996.

VIALI, L., CURY, H. O Papel do Erro na Aprendizagem de Matemática, s/d. Disponível em: www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Palestra/PA%20-%2013.doc. Acesso em: 05 Nov. 2016.

________________, Análise de erros em probabilidade: uma pesquisa com professores em formação continuada. Educação Matemática Pesquisa ISSN 1983-3156, América do Norte, 11, jan. 2010. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/ emp/article/view/2083. Acesso em: 10 set 2016.

VYGOTSKY, L.S. et al. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone; EDUSP, 1988.

---

1. Professor da URI- Campus de Erechim. Doutor em Educação/ UFRGS.
2. Professora da Escola Pedro Hererias – Getúlio Vargas. Pedagoga.

Apêndice A

Escola Estadual Ruy Araújo

Projeto: **Retomada de conceitos prévios em matemática** **Aula 01**

Assunto: Critérios de divisibilidade, Fatoração e decomposição, Potências e Radicais.

Aluno(a): ____ Turma: ________

Teste de Sondagem

01. Critérios de divisibilidade por 2, 3 e 5

Indique o conjunto de valores de x, para que os números a seguir admitam divisão exata?

a) 352x seja divisível por 2 X = { }

Justifique: ____

b) 352x seja divisível por 3 X = { }

Justifique: ____

c) 352x seja divisível por 5 X = { }

Justifique: ____

d) 352x seja divisível por 2 e por 3 X = { }

Justifique: ____

02. Decomposição

a) Decomponha o número 8288 em função dos valores relativos de seus algarismos

8288 = ____

b) Decomponha o número 5258 em função dos valores relativos de seus algarismos

5258 = ____

c) Determine a metade de 8288 por decomposição dos valores relativos de seus algarismos

8288 : 2 = ____

d) Determine o produto entre 2 e 5258 por decomposição dos valores relativos de seus algarismos

5258 x 2 = ____

03. Fatoração e Potenciação - Indique em forma de potências de bases primas, os números a seguir:

a) 36

b) 40

c) 300

d) 400

04. Multiplicação e divisão entre potências de bases iguais

a) Indicar em uma só potência o produto $2^4.2^6 =$

b) Indicar em uma só potência o produto $3^{-5}.3^6 =$

c) Indicar em uma só potência o quociente $5^4 : 5^6 =$

d) Indicar em uma só potência o quociente $\dfrac{2^4.2^6}{2^2} =$

05. Potências: Decomposições e fatorações convenientes

a) Transforme a potência 5^8 em um produto conveniente entre potências de mesma base

b) Transforme a potência 5^{3+n} em um produto conveniente entre potências de mesma base

c) Transforme a potência 5^{3-n} em um produto conveniente entre potências de mesma base

d) Simplifique a seguinte expressão: $\dfrac{3^{n+2} - 3^{n}}{3^{n+1} + 3^{n-1}}$

06. Radiciação: Determine os valores das seguintes raízes

a) $\sqrt{8}$ = b) $\sqrt{120}$ = c) $\sqrt{200}$ = d) $\sqrt{0,25}$ =

Apêndice B

Escola Estadual Ruy Araújo

Projeto: **Retomada de conceitos prévios em matemática** **Aula 02**

Assunto: MMC e Operações com frações

Aluno(a): ____ Turma: _______

Teste de Sondagem

1. Determinar o MMC entre os números:

a) 20,e 30 b) 30, 60 e 240 d) 9 e 10

e) 2x e $5x^2$ f) (3 + x) e $9 - x^2$

2. Efetue as adições a seguir:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ b) $3+\frac{1}{2}=$

c) $5-\frac{2}{3}=$ d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$

e) $\frac{5}{3}-2=$

3. Efetue as multiplicações a seguir:

a) $\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=$

b) $3x\frac{1}{2}=$

c) $\frac{12}{3}x\frac{7}{4}x\frac{3}{27}x\frac{3}{8}=$

d) $\frac{1}{2}:\frac{5}{8}=$

e) $\frac{18}{27}x\frac{5}{12}x\frac{27}{25}x\frac{60}{90}x\frac{30}{90}=$

Apêndice C

Escola Estadual Ruy Araújo

Projeto: **Retomada de conceitos prévios em matemática** **Aula 03**

Assunto: Porcentagens

Aluno(a): ____ Turma: _______

Teste de Sondagem

1. Transforme em percentuais as frações a seguir:

a) $\frac{2}{5} =$ b) $\frac{3}{5} =$

c) $\frac{3}{4} =$ d) $\frac{2}{8} =$

2. Determine os percentuais a seguir

a) $20\%\ de\ 1300 =$ b) 35% de $720 =$

c) 20% de 25% de $720 =$ d) 75% de $720 =$

3. (CN, 2000 – Adaptado) *Uma senhora extremamente obesa, pesando aproximadamente 394,48 kg submeteu-se a um regime forçado e como consequência de sua dedicação perdeu 30% da sua massa corpórea nos três meses iniciais do ano de 2014. Nos três meses seguintes, tendo se fartada das guloseimas do período junino, engordou 30%.*

Pergunta-se: Ao final do 1º semestre essa jovem senhora perdeu ou ganhou massa corpórea ou nada se alterou?

Se, ao final do semestre, perdeu ou ganhou, qual foi o percentual referente a essa alteração?

4. (PSC/UFAM, 2004) José comprou um carro popular por R$ 14.000,00. A cada ano que passa, o valor do carro diminui 20% em relação ao valor do ano anterior. Então, no quarto ano, qual será o seu valor em reais?

Apêndice D

Evento: III Mostra de Bio Exatas ocorrido na Escola Estadual Ruy Araújo, em 2015.

Entrevista concedida pela Professora ANDREIA PINTO DE OLIVEIRA ao estagiário SEVERINO F. SILVA, aluno do curso de Licenciatura em Matemática do IFAM e integrante da coordenação das oficinas de exatas da III Mostra de Bio Exatas da E.E. Ruy Araújo.

Estagiário: Professora Andreia, em visita à III Mostra de Bio Exatas do Colégio Ruy Araújo, qual foi a sua avaliação geral, considerando suas experiências nesse nível de ensino, sobre as oficinas apresentadas?

Professora Andréia: Gostei muito. Principalmente do nível de envolvimento dos alunos que participaram das oficinas. Todos estavam bem preparados, não só os alunos das oficinas de matemática, mas também das demais áreas, física, biologia e química. Falando com segurança seus tópicos e respondendo às perguntas dos alunos e professores que ali estavam visitando seus estandes. Isso é muito importante, conseguir mobilizar tantos alunos à participarem de um evento com essas características nos dias de hoje, onde as informações se espalham com tanta rapidez, e de várias formas, com tanta tecnologia. Essa tecnologia foi utilizada em várias oficinas, mas vale ressaltar que isso não desviou a atenção deles do principal objetivo, que foi adquirir conhecimento e vincular esse conhecimento ao seu dia a dia. Fica aqui meus parabéns a todos os professores envolvidos na organização e mobilização dos alunos e todo o evento em geral. Belo trabalho.

Estagiário: Professora Andreia, considerando o fato de que a senhora já atuou como professora de matemática no ensino médio em escolas públicas e nos dias atuais desempenhas essa atividade em nível de ensino superior na instituição IFAM, em relação às oficinas da Mostra na área de exatas, denominadas “Criptografia com Matrizes” e “Aplicabilidade dos Sistemas Lineares” qual a sua avaliação sobre o desempenho das equipes na apresentação desses temas?

Professora Andréia, sobre a "Criptografia com as Matrizes": É importante perceber que os alunos envolvidos nessa oficina tiveram contato com uma aplicação da matemática que nos cerca diariamente. Hoje, quase todas as atividades realizadas na rede mundial de computadores, sejam acessos às redes bancárias, às informações de um e-mail ou aos perfis em redes sociais, só são possíveis através de senhas e códigos. Nesse trabalho eles aprenderam como os códigos de senhas eletrônicas estão diretamente relacionados com a matemática. Isso é muito bom, pois os alunos têm uma aplicação simples de matemática que faz parte das suas atividades diárias e que mostra o quão importante é estudar a matemática. Além disso, e o mais importante é que, cria a curiosidade de pesquisar um pouco mais sobre matemática e abre as portas para o curso superior, quem sabe na Licenciatura em Matemática.

Professora Andréia, sobre a "Aplicabilidade dos Sistemas Lineares": Nesse trabalho, como também na criptografia, é importante ressaltar, que os alunos ficaram à vontade para discutir o tema. Isso é muito bom, pois mostra que eles queriam fazer a pesquisa, tiveram curiosidade para pesquisar e foram realmente os autores. É claro que os professores têm papel importantíssimo na realização do trabalho, mas dar autonomia aos alunos faz com que eles adquiram uma segurança que faz toda a diferença na hora de transmitir as informações da pesquisa.

Estagiário: Devo confidenciá-la de que a vossa presença no evento e a forma atenciosa como cumprimentas-te os alunos componentes das equipes envolvidas nas apresentações das oficinas da III Mostra de Bio Exatas do Colégio Ruy Araújo, em particular nas oficinas de Criptografia e Aplicabilidade dos Sistemas Lineares, gerou uma comoção entre seus integrantes no sentido de que esses alunos passaram a perceber que era possível optarem, entre as sub áreas das ciências exatas, pela Licenciatura em Matemática disponibilizada pelo IFAM. O que a jovem mestra tem a comentar sobre esse fenômeno, considerando que essa comoção teve origem a partir dos vossos elogios sobre a desenvoltura daqueles componentes sobre os temas matemáticos apresentados?

Professora Andréia: Todo mundo gosta de um elogio, não é verdade. Neste caso eles foram sinceros rsrsrsrs. Às vezes, quando somos requisitados a participar de um evento como este, os alunos que vão expor já se sentem intimidados pela presença de professores da universidade que vão avaliar seus trabalhos. É uma reação normal, em todos os níveis de ensino, em especial no nível médio. Mas para nós é uma oportunidade de mostrar que muitas vezes é mais importante valorizar o empenho do aluno que o próprio resultado alcançado por ele. Além disso, mostrar que ele tem aptidão para o estudo, em nível superior de matemática, também deve ser evidenciado, já que em muitos casos, os alunos do ensino médio que tem essa facilidade com a matemática acabam optando por outras áreas por não acharem que terão o mesmo retorno financeiro escolhendo o magistério. Mostrar que eu sou feliz e realizada, profissionalmente e financeiramente falando, sendo professora de matemática, é importante pois as vezes acabamos escolhendo áreas que nos dão o retorno financeiro desejado, porém não nos realizam pessoalmente e nem nos dão a alegria e o prazer de ver uma criança ou adolescente descobrindo coisas novas com matemática ou outra ciência. Ressaltar o que o trabalho deles foi bem feito só estimula a realizarem muitos outros trabalhos com a mesma qualidade.

Estagiário: Do evento vivenciado, o que recomendarias aos educadores do ensino básico em matemática que atuam nesse segmento?
Professora Andréia: Acho que estão no caminho certo. É por aí. Fazer a ponte que liga os conhecimentos teóricos com situações práticas é muito mais estimulante para todo mundo: alunos, professores e comunidade. Sei que isso não é fácil, e sei também que nem todos os conteúdos podem ser diretamente relacionados às situações do dia a dia. Mas é nosso dever, como educadores tentar. Com certeza esses alunos vão sempre lembrar de tudo que aprenderem na organização e realização do evento, e mais que isso, de todos os professores e da convivência extraclasse que provavelmente puderam ter nessa organização. É isso que os marca e em muitos casos muda suas vidas. Não podemos esquecer disso. Quem de nós não se lembra de um professor do ensino médio que marcou nossa vida. É melhor marcar de forma positiva que negativa, não é?

Estagiário: Muito obrigado jovem mestra pela disponibilização dessa entrevista, pois acredito que vossas palavras repercutirão infinitamente no inconsciente desses alunos, criando em suas malhas neuronais inquietudes que os conduzam a se “aprisionarem” involuntariamente num intervalo arbitrário de opções, cujo centro norteador apresentar-se-á como valor aderente às ciências exatas, em especial à Licenciatura em Matemática.

Apêndice E

PLANO DE AULA I - PROBABILIDADES

Unidade de ensino: COLÉGIO ESTADUAL RUY ARAÚJO

Tema: Probabilidades: Conceito; união de dois eventos; eventos complementares; e eventos independentes.

Disciplina: Matemática Série: 2º anos 01, 02, 03, 04 e 05/EM

---

1. Introdução

A motivação do aluno para se apreender este conteúdo pode ser obtida a partir das justificativas do professor quanto às aplicações desse tema no cotidiano, nas diversas áreas do conhecimento ou em tópicos matemáticos subsequentes, em especial na Biologia genética.

2. Objetivos Gerais:

Compreender as probabilidades de ocorrência de um evento.

Objetivos Específicos:

- Conceituar probabilidade; espaço amostral e universo;
- Relacionar as probabilidades aos números racionais;
- Efetuar as operações com a união de eventos e eventos independentes;
- Resolver as atividades propostas na fase de interação com o grupo.

3. Estratégias metodológicas

No primeiro momento apresentar-se-ão:

- Os conhecimentos prévios necessários à compreensão do novo conteúdo;
- A nova teoria com contraexemplos para ratificar o tema proposto;
- A finalização, com a interação do tema com a assistência de forma interrogativa.

Nessa fase é salutar apresentar:

- Modelos de questões que promovam conflitos cognitivos no educando.

- Questões para que o aluno possa praticar extraclasse e participar de forma proativa no segundo momento.

No segundo momento apresentar-se-ão situações para que o instruendo perceba a utilização prática desse conhecimento nas análises combinatórias, além das demais áreas, como nas probabilidades e na geometria; Será apresentada uma bateria de atividades sobre o tema em questão.

Num terceiro momento, serão colocadas em debate, as questões da atividade destinada à ratificação do conhecimento. Essa fase pode ser considerada como "revisão" e deve atender alunos faltosos ou desatentos no tempo anterior. Pode-se também aplicar pontuação (avaliação de conhecimento) para participações consideradas positivas (debates, novas rotinas de resolução, descrição lógica de conceitos, resolução das questões, etc).

4. Meios auxiliares

Quadro branco e Pincéis nas cores preto, azul e vermelho.

5. Atividade a ser desenvolvida:

5.1 - Operações com Probabilidades

(PSC/UFAM,2013), Dois dados, sendo um de seis faces e outro de vinte faces, com faces enumeradas de 1 até 6 e de 1 até 20 respectivamente, são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de a soma dos resultados dos dois dados ser igual a 12?

a) 5% b) 8% c) 10% d) 12% e) 16%

Resolução:

O que queremos: {(1 + 11); (2 + 10); (3 + 9); (4 + 8); (5 + 7); (6 + 6)}
6 possibilidades

O que temos: 6 x 20 = 120 possibilidades

$$\frac{6}{120} \rightarrow \frac{1}{20}.100 = 5\%$$

(PSC/UFAM,2011), As notícias a seguir estão ficando a cada dia mais comuns.

“Posto vende gasolina adulterada com 76% de álcool em uma determinada cidade brasileira.”

“Fiscalização do Ministério Público e da Agência Nacional do Petróleo lacrou um posto de combustível, pois o mesmo vendia a gasolina adulterada.”

Uma determinada cidade possui 10 postos de combustíveis, dos quais 20% vendem gasolina adulterada. Se forem sorteados aleatoriamente dois postos para serem fiscalizados, qual a probabilidade de os postos fiscalizados serem ambos infratores?

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{2}{45}$ c) $\frac{1}{45}$ d) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{1}{50}$

Resolução:

20% de 10 = 2

O que queremos: Escolher, independentemente, dois postos infratores. O que temos: 2 de 10 possibilidades para a primeira escolha e 1 de 9 para a segunda escolha.

$$\frac{2}{10}.\frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

(PSC/UFAM, 2009), Em uma determinada cidade, existe um hotel que possui 100 apartamentos, cuja numeração vai de 1 a 100. A probabilidade de um hóspede deste hotel (suponha que o hotel esteja lotado), escolhido ao acaso, esteja alojado em um apartamento cujo número seja um múltiplo de 5 ou de 7, é:

a) 32% b) 30% c) 25% d) 40% e) 28%

Resolução:

Comentário: O que queremos? Quantidade de números múltiplos de 5 ou de 7. Em qual universo? 100.

Precisamos determinar as quantidades de números múltiplos de 5, de 7 e de 5 e 7 pela união entre conjuntos.

$$U = M(5) + M(7) - M(35)$$

Lembrar que 5 e 7 são primos entre si, logo a MMC é 5 x 7 = 35

Para utilizarmos a união entre conjuntos precisamos determinar a quantidade de múltiplos de 5, de 7 e de 5 E 7 (comuns), utilizando a ideia do Termo Geral das Progressões Aritméticas ou a ideia da contagem de números consecutivos:

$$U = M(5) + M(7) - M(35) \rightarrow 20 + 14 - 2 = 32$$

$$P = \frac{32}{100} \rightarrow 32\%$$

(ENEM, 2012), Uma coleta de dados em mais de 5 mil sites da internet apresentou os conteúdos de interesse de cada faixa etária. Na tabela a seguir, estão os dados obtidos para a faixa etária de 0 a 17anos.

Preferências	**Porcentagem**
Música	22,5
Blogs	15,0
Serviços Web*	10,2
Games	10,0
Horóscopo	9,0
Game on-line	7,4
Educação **	6,5
Teen	4,0
Compras	3,4
Outras	12,0

* Serviços web: aplicativos on-line, emoticons, mensagens para redes sociais, entre outros.
** Sites sobre vestibular, ENEM, páginas com material de pesquisa escolar.

Considere que esses dados refletem os interesses dos brasileiros desta faixa etária. Selecionando, ao acaso, uma pessoa desta faixa etária, a probabilidade de que ela não tenha preferência por horóscopo é:

a) 0,09. b) 0,10. c) 0,11. d) 0,79. e) 0.91.

Resolução: P = 100 – 9 = 91% ou 0,91

6. Bibliografia de Apoio:

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática - Ensino Médio:** 2º ano, São Paulo: Ática, 2005

7. Avaliação da atividade docente:

A compreensão dos conceitos apresentados e as questões propostas obtiveram razoável aproveitamento por significativa parcela de alunos das turmas de 2º ano. Um dos fatores que contribuiu para esse feito foram os modelos de questões selecionadas de exames de origem PSC e ENEM. O fator negativo se deu pela ausência de domínio do aluno na manipulação de números racionais (frações versos porcentagens e decimais), tendo a sua imperativa reapresentação tomado grande parte do tempo disponível para o conteúdo principal: as probabilidades.

<u>Apêndice F</u>

PLANO DE AULA II – RACIONAIS ARITMÉTICOS

Unidade de ensino: COLÉGIO ESTADUAL RUY ARAÚJO

Período da aplicação: 08, 09, 10, 11 e 15 Set 2015

Tema: Racionais Aritméticos: Operações entre frações – Potências e radicais com racionais.

Disciplina: Matemática Série: 2º anos 01, 02, 03, 04 e 05/EM

---

1. Introdução

A motivação do aluno para se apreender este conteúdo pode ser obtida a partir das justificativas do professor quanto às aplicações desse tema no cotidiano, nas diversas áreas do conhecimento ou em tópicos matemáticos subsequentes, em especial nas análises combinatórias.

2. Objetivos Gerais:

Compreender as operações com números racionais.

Objetivos Específicos:

- Efetuar as operações com frações;
- Relacionar os números fracionários com as porcentagens e decimais;
- Efetuar as operações com potências de base racional e radicais de racionais;
- Resolver as atividades propostas na fase de interação com o grupo.

3. Estratégias metodológicas

No primeiro momento apresentar-se-ão:

- Os conhecimentos prévios necessários à compreensão do novo conteúdo;
- A nova teoria com contraexemplos para ratificar o tema proposto;
- A finalização, com a interação do tema com a assistência de forma interrogativa.

Nessa fase é salutar apresentar:

- Modelos de questões que promova conflitos cognitivos no educando.

- Questões para que o aluno possa praticar extraclasse e participar de forma proativa no segundo momento.

No segundo momento apresentar-se-ão situações para que o instruendo perceba a utilização prática desse conhecimento nas análises combinatórias, além das demais áreas, como nas probabilidades e na geometria; Será apresentada uma bateria de atividades sobre o tema em questão.

Num terceiro momento, serão colocadas em debate, as questões da atividade destinada à ratificação do conhecimento. Essa fase pode ser considerada como “revisão” e deve atender alunos faltosos ou desatentos no tempo anterior. Pode-se também aplicar pontuação (avaliação de conhecimento) para participações consideradas positivas (debates, novas rotinas de resolução, descrição lógica de conceitos, resolução das questões, etc).

4. Meios auxiliares

Quadro branco e Pincéis nas cores preto, azul e vermelho.

5. Atividades a serem desenvolvidas:

5.1 - Operações com Frações

1. Determinar o MMC entre os números:

a) 20 e 30 b) 30, 60 e 240 c) 9 e 10

d) $2x$ e $5x^2$ e) $(3 + x)$ e $9 - x^2$

2. Efetue as adições a seguir:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$ b) $3+\frac{1}{2}=$ c) $5-\frac{2}{3}=$

d) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=$ e) $\frac{5}{3}-2=$

3. Efetue as multiplicações a seguir:

a) $\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=$ b) $3x\frac{1}{2}=$ c) $\frac{12}{3}x\frac{7}{4}x\frac{3}{27}x\frac{3}{8}=$

d) $\frac{1}{2}:\frac{5}{8}=$ e) $\frac{18}{27}x\frac{5}{12}x\frac{27}{25}x\frac{60}{90}x\frac{30}{90}=$

5.2 - Operações com Porcentagens

1. Transformar em percentuais as frações a seguir:

$a)\frac{2}{5}=$ $b)\frac{3}{5}=$ $c)\frac{3}{4}=$ $d)\frac{2}{8}=$

2. Transformar em percentuais os decimais a seguir:

$a)\ 0,4=$ $b)\ 0,6=$ $c)\ 0,75=$ $d)\ 0,25=$

3. Determine os percentuais a seguir

a) $20\%\ de\ 1300=$ b) 35% de $720=$ c) 20% de 25% de $720=$
d) 75% de $720=$

4. **(CN, 2000 – Adaptado)**, *Uma senhora extremamente obesa, pesando aproximadamente 394,48 kg submeteu-se a um regime forçado e como consequência de sua dedicação perdeu 30% da sua massa corpórea nos três meses iniciais do ano de 2014. Nos três meses seguintes, tendo se fartada das guloseimas do período junino, engordou 30%. Pergunta-se: Ao final do 1º semestre essa jovem senhora perdeu ou ganhou massa corpórea ou nada se alterou? Se, ao final do semestre, perdeu ou ganhou, qual foi o percentual referente a essa alteração?*

5. **(PSC/UFAM, 2004)**, José comprou um carro popular por R$ 14.000,00. A cada ano que passa, o valor do carro diminui 20% em relação ao valor do ano anterior. Então, no quarto ano, qual será o seu valor em reais?

6. Bibliografia de Apoio:

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática - Ensino Fundamental:**. 6º ano, São Paulo: Ática, 2005

IEZZI, Gelson. **Matemática e Realidade**: 6º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antônio Machado – 6. Ed – São Paulo: Atual, 2009.

7. Avaliação da atividade docente:

A compreensão dos conceitos reapresentados sobre os racionais e as questões propostas obteve razoável aproveitamento por significativa parcela de alunos das turmas de 2º ano. Nas fases iniciais, quando submetidos aos testes de sondagem, pareciam desconhecer totalmente os procedimentos de resolução das operações com racionais. Mas, nas fases finais já demonstravam desenvoltura na efetivação das soluções.